

計量経済学

(99年度作成)

1 計量経済学について

- 経済理論(ミクロ, マクロ, 財政, 金融, 国際経済, ...)
- データ(GNP, 消費, 投資, 金利, 為替レート, ...)

計量経済学 \Rightarrow 経済理論が現実になり立つものかどうかを, データを用いて, 統計的に検証する。

1.1 例1: マクロの消費関数

$$C = f(Y)$$

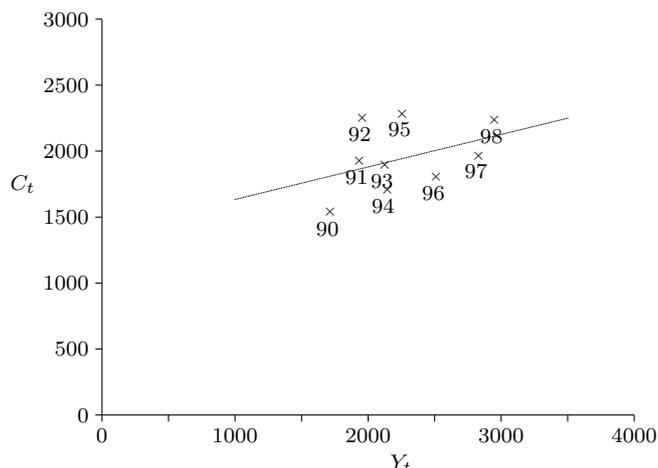
ただし, C は消費, Y は所得。

1. $Y \nearrow \Rightarrow C \nearrow$
2. $\frac{dC}{dY}$ = 限界消費性向 = 所得1円増加で消費が何円増加するか
3. すなわち, $\frac{dC}{dY} > 0$

モデルの定式化

1. $C = a + bY$
2. $b = \frac{dC}{dY}$ = 限界消費性向
3. a = 基礎消費 ($Y = 0$ のときに必要な消費)
4. 符号条件: $a > 0, b > 0$ (しかも, $1 > b$)

図1: 消費 (C_t) と所得 (Y_t)



1. $\times \rightarrow$ 実際のデータ

2. $(Y_t, C_t) \Rightarrow t$ 期のデータ, i.e., $t = 1, 2, \dots, 9$

3. $t = 1 \Rightarrow$ 1990年,

$t = 2 \Rightarrow$ 1991年,

...

$t = 9 \Rightarrow$ 1998年,

1. 実際のデータを用いて, a, b を求める。

2. a, b を求める \equiv 現実の経済構造を求める

3. その結果, もし $a > 0, 1 > b > 0$ なら, 経済理論は現実経済を説明していると言える。

1.2 例2: 日本酒の需要関数

$$Q = f(Y, P_1, P_2)$$

ただし, Q は日本酒の需要量, Y は所得, P_1 は日本酒の価格, P_2 は洋酒の価格。

1. $Y \nearrow \Rightarrow Q \nearrow$,
 $P_1 \nearrow \Rightarrow Q \searrow$,
 $P_2 \nearrow \Rightarrow Q \nearrow$
2. $\frac{\partial Q}{\partial Y} > 0, \frac{\partial Q}{\partial P_1} < 0, \frac{\partial Q}{\partial P_2} > 0$
3. 日本酒と洋酒は代替財
4. モデルの定式化 (A)

$$Q = a + b_1Y + b_2P_1 + b_3P_2$$

5. Q, Y, P_1, P_2 を用いて, a, b_1, b_2, b_3 を求める (日本酒の需要構造を求める)。

6. 符号条件: $b_1 > 0, b_2 < 0, b_3 > 0, a ?$

7. t 期のデータ (Q_t, Y_t, P_{1t}, P_{2t})

8. T 組のデータ, i.e., $t = 1, 2, \dots, T$

9. モデルの定式化 (B)

$$Q = a + b_1 Y + b_2 \frac{P_1}{P_2}$$

符号条件: $b_1 > 0, b_2 < 0$

10. モデルの定式化 (C)

$$\log(Q) = a + b_1 \log(Y) + b_2 \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

符号条件: $b_1 > 0, b_2 < 0$

11. モデル (A), (B), (C) のどれが最も現実的かを得られた結果から判断する。

$$7. \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n X_i Y_i + \sum_{i=1}^n Y_i^2$$

$$8. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_i Y_j = \sum_{i=1}^n X_i \sum_{j=1}^m Y_j$$

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) = (1, 3, -3, 2),$$

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = (2, 1, 2, -1) \text{ の例をとる。}$$

$$1. \sum_{i=1}^n X_i = 1 + 3 - 3 + 2 = 3$$

$$2. \sum_{i=1}^n X_i^2 = 1^2 + 3^2 + (-3)^2 + 2^2 = 23$$

$$3. \sum_{i=1}^n X_i Y_i = 1 \times 2 + 3 \times 1 + (-3) \times 2 + 2 \times (-1) = -3$$

$$4. \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) = (1+2) + (3+1) + (-3+2) + (2-1) = 7$$

$$5. \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)^2 = (1+2)^2 + (3+1)^2 + (-3+2)^2 + (2-1)^2 = 27$$

2 準備: 和記号 Σ について

データとして, X_1, X_2, \dots, X_n と Y_1, Y_2, \dots, Y_n のを考える。

$$1. \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$2. \sum_{i=1}^n X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

$$3. \sum_{i=1}^n X_i Y_i = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots + X_n Y_n$$

4. 定数 c について,

$$\sum_{i=1}^n c = c + c + \dots + c = nc$$

$$5. \sum_{i=1}^n c X_i = c \sum_{i=1}^n X_i$$

$$6. \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n Y_i$$

2.1 重要な公式・性質

$$1. \text{ 標本平均 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$2. \text{ 標本分散 } s^2 = s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$3. \text{ 標本共分散 } s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

$$4. \sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}$$

$$5. \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0$$

$$6. \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2$$

$$7. \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y} \\
&= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) Y_i \\
&= \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}) X_i
\end{aligned}$$

3 最小二乗法について

経済理論に基づいた線型モデルの係数の値をデータから求める時に用いられる手法 \Rightarrow 最小二乗法

3.1 最小二乗法と回帰直線

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ のように n 組のデータがあり, X_i と Y_i との間に以下の線型関係を想定する。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i,$$

X_i は説明変数, Y_i は被説明変数, α, β はパラメータとそれぞれ呼ばれる。

上の式は回帰モデル (または, 回帰式) と呼ばれる。目的は, 切片 α と傾き β をデータ $\{(X_i, Y_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ から推定すること,

データについて:

1. タイム・シリーズ (時系列)・データ: i が時間を表す (第 i 期)。
2. クロス・セクション (横断面)・データ: i が個人や企業を表す (第 i 番目の家計, 第 i 番目の企業)。

3.2 切片 α と傾き β の推定

次のような関数 $S(\alpha, \beta)$ を定義する。

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

このとき,

$$\min_{\alpha, \beta} S(\alpha, \beta)$$

となるような α, β を求める (最小自乗法)。このときの解を $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ とする。

最小化のためには,

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$$

を満たす α, β が $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ となる。

すなわち, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は,

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0, \tag{2}$$

を満たす。

さらに,

$$\sum_{i=1}^n Y_i = n \hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

行列表示によって,

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix},$$

逆行列の公式:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ について, まとめて,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & -\sum_{i=1}^n X_i \\ -\sum_{i=1}^n X_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

さらに, $\hat{\beta}$ について解くと,

$$\hat{\beta} = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - (\sum_{i=1}^n X_i)(\sum_{i=1}^n Y_i)}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

連立方程式の (3) 式から,

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X}$$

となる。ただし,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i,$$

とする。

数値例: 以下の数値例を使って, 回帰式 $Y_i = \alpha + \beta X_i$ の α, β の推定値 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を求める。

i	Y_i	X_i
1	6	10
2	9	12
3	10	14
4	10	16

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を求めるための公式は

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X}$$

なので, 必要なものは $\bar{X}, \bar{Y}, \sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n X_i Y_i$ である。

i	Y_i	X_i	$X_i Y_i$	X_i^2
1	6	10	60	100
2	9	12	108	144
3	10	14	140	196
4	10	16	160	256
合計	$\sum Y_i$ 35	$\sum X_i$ 52	$\sum X_i Y_i$ 468	$\sum X_i^2$ 696
平均	\bar{Y} 8.75	\bar{X} 13		

よって,

$$\hat{\beta} = \frac{468 - 4 \times 13 \times 8.75}{696 - 4 \times 13^2} = \frac{13}{20} = 0.65$$

$$\hat{\alpha} = 8.75 - 0.65 \times 13 = 0.3$$

となる。

注意事項:

1. α, β は真の値で未知
2. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は α, β の推定値でデータから計算される

回帰直線は

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i,$$

として与えられる。

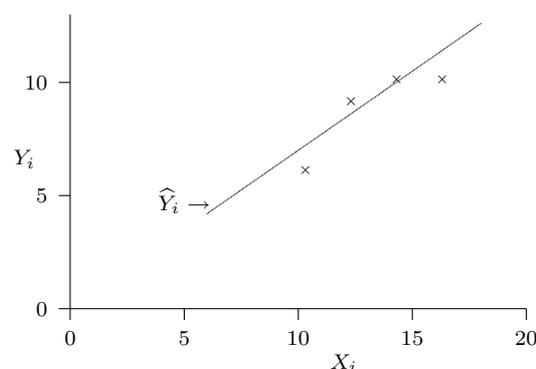
上の数値例では,

$$\hat{Y}_i = 0.3 + 0.65 X_i$$

となる。

i	Y_i	X_i	$X_i Y_i$	X_i^2	\hat{Y}_i
1	6	10	60	100	6.8
2	9	12	108	144	8.1
3	10	14	140	196	9.4
4	10	16	160	256	10.7
合計	$\sum Y_i$ 35	$\sum X_i$ 52	$\sum X_i Y_i$ 468	$\sum X_i^2$ 696	$\sum \hat{Y}_i$ 35.0
平均	\bar{Y} 8.75	\bar{X} 13			

図 2: Y_i, X_i, \hat{Y}_i



\hat{Y}_i を実績値 Y_i の予測値または理論値と呼ぶ。

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i,$$

\hat{u}_i を残差と呼ぶ。

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{u}_i,$$

さらに, \bar{Y} を両辺から引いて,

$$(Y_i - \bar{Y}) = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + \hat{u}_i,$$

3.3 残差 \hat{u}_i の性質について

$\hat{u}_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i$ に注意して, (1) 式から,

$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0,$$

を得る。

(2) 式から,

$$\sum_{i=1}^n X_i \hat{u}_i = 0,$$

を得る。

$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$ から,

$$\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i \hat{u}_i = 0,$$

を得る。なぜなら,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i \hat{u}_i &= \sum_{i=1}^n (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i) \hat{u}_i \\ &= \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i \hat{u}_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

i	Y_i	X_i	\hat{Y}_i	\hat{u}_i	$X_i \hat{u}_i$	$\hat{Y}_i \hat{u}_i$
1	6	10	6.8	-0.8	-8.0	-5.44
2	9	12	8.1	0.9	10.8	7.29
3	10	14	9.4	0.6	8.4	5.64
4	10	16	10.7	-0.7	-11.2	-7.49
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum \hat{Y}_i$	$\sum \hat{u}_i$	$\sum X_i \hat{u}_i$	$\sum \hat{Y}_i \hat{u}_i$
	35	52	35.0	0.0	0.0	0.00

3.4 決定係数 R^2 について

次の式

$$(Y_i - \bar{Y}) = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + \hat{u}_i,$$

の両辺を二乗して, 総和すると,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left((\hat{Y}_i - \bar{Y}) + \hat{u}_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y}) \hat{u}_i + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \end{aligned}$$

となる。まとめると,

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$$

を得る。さらに,

$$1 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} + \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

それぞれの項は,

1. $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \Rightarrow y$ の全変動
2. $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \Rightarrow \hat{Y}_i$ (回帰直線) で説明される部分
3. $\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \Rightarrow \hat{Y}_i$ (回帰直線) で説明されない部分

となる。

回帰式の当てはまりの良さを示す指標として, 決定係数 R^2 を以下の通りに定義する。

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

または,

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2},$$

として書き換えられる。

または, $Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i$ と

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y} - \hat{u}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y}) - \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y}) \hat{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y}) \end{aligned}$$

を用いて,

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \right)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2} \\ &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}} \right)^2 \end{aligned}$$

と書き換えられる。すなわち、 R^2 は Y_i と \hat{Y}_i の相関係数の二乗と解釈される。

または、 $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$ と $\bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{X}$ を用いて、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 &= \hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\ &= \hat{\beta} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \end{aligned}$$

を利用すると、

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \\ &= \frac{\hat{\beta} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \\ &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \right)^2 \end{aligned}$$

としても書き換えられる。

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 \text{ から、明らかに、}$$

$$0 \leq R^2 \leq 1,$$

となる。 R^2 が 1 に近づけば回帰式の当てはまりは良いと言える。しかし、 t 分布のような数表は存在しない。したがって、「どの値よりも大きくなるべき」というような基準はない。

慣習的には、メドとして 0.9 以上を判断基準にする。

数値例： 決定係数の計算には以下の公式を用いる。

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}^2 \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)}{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2}$$

計算に必要なものは、 $\hat{\beta}$, \bar{X} , \bar{Y} , $\sum_{i=1}^n X_i^2$, $\sum_{i=1}^n Y_i^2$ である。

i	Y_i	X_i	Y_i^2	X_i^2
1	6	10	36	100
2	9	12	81	144
3	10	14	100	196
4	10	16	100	256
合計	$\sum Y_i$ 35	$\sum X_i$ 52	$\sum Y_i^2$ 317	$\sum X_i^2$ 696
平均	\bar{Y} 8.75	\bar{X} 13		

$$\hat{\beta} = 0.65, \bar{X} = 13, \bar{Y} = 8.75, \sum_{i=1}^n X_i^2 = 696, \sum_{i=1}^n Y_i^2 = 317 \text{ なので、}$$

$$R^2 = \frac{0.65^2(696 - 4 \times 13^2)}{317 - 4 \times 8.75^2} = \frac{8.45}{10.75} = 0.786$$

3.5 まとめ

$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ を求めるための公式は

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2} \\ \hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \end{aligned}$$

なので、必要なものは \bar{X} , \bar{Y} , $\sum_{i=1}^n X_i^2$, $\sum_{i=1}^n X_i Y_i$ である。決定係数の計算には以下の公式を用いる。

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}^2 \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)}{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2}$$

計算に必要なものは、 $\hat{\beta}$, \bar{X} , \bar{Y} , $\sum_{i=1}^n X_i^2$, $\sum_{i=1}^n Y_i^2$ である。