エコノメトリックス

(2016年度前期 講義ノート)

April 19, 2016 (火) 版

教科書『計量経済学』

(山本拓著，新世社，1995年)

谷﨑　久志
大阪大学・経済学部

Contents

1　計量経済学について　1
1.1　例 1：マクロの消費関数 1
1.2　例 2：日本酒の需要関数 4

2　行列について　6

3　最小二乗法について　20

3.1 最小二乗法と回帰直線 20
3.2 切片 α と傾き β の推定 21
3.3 残差 $\widehat{u}_i$ の性質について 29
3.4 決定係数 R^2 について 31
3.5 まとめ 36

4 統計学の回帰分析への応用 38
4.1 回帰モデルの仮定 42
4.2 誤差項 (攪乱項) の経済学的意味 44
4.3 $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の統計的性質 45
4.3.1 $\widehat{\beta}$ について 46
4.3.2 $\widehat{\alpha}$ について 47
4.3.3 $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の平均 48
4.3.4 $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の分散 50
4.3.5 $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の分布 (σ^2 が既知の場合) 61
4.3.6 $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の性質：最良線型不偏性と一致性 64
4.4 誤差項 (または，攪乱項) u_i の分散 σ^2 について 74
4.4.1 $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の分散の不偏推定量 84
4.5 $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の分布 88
4.5.1 統計学の復習 (t 分布) 88

4.5.2 $\widehat{\beta}$ について： 91
4.5.3 $\widehat{\alpha}$ について： 93
4.5.4 まとめ： 94
4.6 α，β の区間推定 (信頼区間) 94
4.6.1 統計学の復習： 区間推定 (信頼区間) 94
4.6.2 α，β の区間推定 (信頼区間) 97
4.7 α，β の仮説検定 100
4.7.1 統計学の復習： 仮説検定 100
4.7.2 α，β の仮説検定 103
4.7.3 t 値について 105

5 多重回帰 111
5.1 重回帰モデルにおける回帰係数の意味 116
5.2 推定量の性質 119
5.3 ダミー変数について 126
5.3.1 異常値 126
5.3.2 構造変化 130

6 関数型について 132

7　系列相関：*DW* について **137**
7.1　*DW* について 137
7.2　最小二乗推定量の分散について 147
7.3　系列相関のもとで回帰式の推定 149

8　不均一分散 (不等分散) **152**
8.1　不均一分散 (不等分散) の意味と推定方法 152
8.2　最小二乗推定量の分散について 155

9　多重共線性について **157**

10　*F* 検定について **162**
10.1　いくつかの例 163
10.2　統計学の復習 164
10.3　検定の方法 165

11　応用例 **168**
11.1　マクロの消費関数 168
11.2　ミクロの消費関数（需要関数） 181
11.3　株価，金利，為替レート 196

12 推定量の求め方 **201**
12.1 最小二乗法 201
12.2 最尤法 203
12.2.1 変数変換 224
12.2.2 回帰分析への応用 226
12.2.3 誤差項に系列相関がある場合 234
12.3 尤度比検定 238

13 時系列分析と季節調整 **251**
13.1 季節変動 253
13.2 トレンド 255
13.3 循環変動 256

14 時系列分析と定常性 **256**
14.1 時系列モデルの特定化 260
14.1.1 自己回帰 (AR) モデル 260
14.1.2 移動平均 (MA) モデル 261
14.1.3 より複雑なモデル 261
14.2 時系列モデルの作成手順と予測 263
14.3 非定常時系列 263

14.3.1 単位根 263
14.3.2 見せかけ回帰 270
14.3.3 共和分 271

- この講義ノートは,

`http://www2.econ.osaka-u.ac.jp/˜tanizaki/class/2014`

からダウンロード可。

教科書
『計量経済学』(山本拓著，1995，新世社)
『基本統計学 (第 3 版)』(豊田他著，東洋経済新報社，2010 年)

1　計量経済学について

- 経済理論 (ミクロ，マクロ，財政，金融，国際経済，$\cdots$)
- データ (GNP，消費，投資，金利，為替レート，$\cdots$)

計量経済学 $\Longrightarrow$ 経済理論が現実に成り立つものかどうかを，データを用いて，統計的に検証する。

1.1　例 1：マクロの消費関数

$$C = f(Y)$$

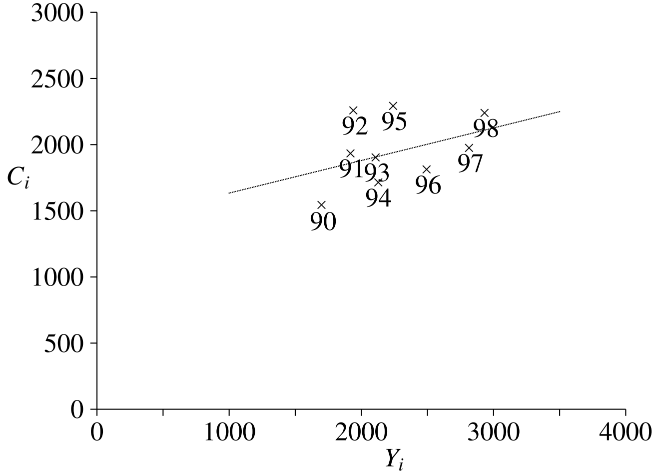
ただし，C は消費，Y は所得。

1. $Y \nearrow \Longrightarrow C \nearrow$
2. $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Y}$ = 限界消費性向 = 所得 1 円増加で消費が何円増加するか
3. すなわち，$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Y} > 0$

モデルの定式化

1. $C = a + bY$
2. $b = \dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Y}$ = 限界消費性向
3. a = 基礎消費 ($Y = 0$ のときに必要な消費)
4. 符号条件：$a > 0$，$b > 0$ (しかも，$1 > b$)

図 1： 消費 (C_i) と所得 (Y_i)



1. $\times \longrightarrow$ 実際のデータ

2. $(Y_i, C_i) \Longrightarrow t$ 期のデータ, i.e., $i = 1, 2, \cdots, 9$

3. $i = 1 \Longrightarrow 1990$ 年,

   $i = 2 \Longrightarrow 1991$ 年,

$\cdots,$

$i = 9 \Longrightarrow 1998$ 年,

1. 実際のデータを用いて，a, b を求める。
2. a, b を求める $\equiv$ 現実の経済構造を求める
3. その結果，もし $a > 0$，$1 > b > 0$ なら，経済理論は現実経済を説明していると言える。

1.2　例 2：日本酒の需要関数

$$Q = f(Y, P_1, P_2)$$

ただし，Q は日本酒の需要量，Y は所得，P_1 は日本酒の価格，P_2 は洋酒の価格。

1. $Y \nearrow \Longrightarrow Q \nearrow,$

   $P_1 \nearrow \Longrightarrow Q \searrow,$

   $P_2 \nearrow \Longrightarrow Q \nearrow$

2. $\dfrac{\partial Q}{\partial Y} > 0, \ \dfrac{\partial Q}{\partial P_1} < 0, \ \dfrac{\partial Q}{\partial P_2} > 0$

3. 日本酒と洋酒は代替財

4. モデルの定式化 (A)

$$Q = a + b_1 Y + b_2 P_1 + b_3 P_2$$

5. Q, Y, P_1, P_2 を用いて，a, b_1, b_2, b_3 を求める (日本酒の需要構造を求める)。

6. 符号条件： $b_1 > 0, b_2 < 0, b_3 > 0, a$?

7. t 期のデータ $(Q_i, Y_i, P_{1i}, P_{2i})$

8. n 組のデータ, i.e., $i = 1, 2, \cdots, n$

9. モデルの定式化 (B)

$$Q = a + b_1 Y + b_2 \frac{P_1}{P_2}$$

符号条件： $b_1 > 0, b_2 < 0$

10. モデルの定式化 (C)

$$\log(Q) = a + b_1 \log(Y) + b_2 \log(\frac{P_1}{P_2})$$

符号条件： $b_1 > 0, b_2 < 0$

11. モデル (A), (B), (C) のどれが最も現実的かを得られた結果から判断する。

2　行列について

A を 2×2 行列とすると,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

と表される。

$a_{ij} = A$ の第 i 行，第 j 列の要素

a を 2×1 行列 (縦ベクトル) とすると,

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

と表される。

$a_i = a$ の第 i 要素

a を 1×2 行列 (横ベクトル) とすると,

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

と表される。

$a_i = a$ の第 i 要素

A を $n \times k$ 行列とすると,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

と表される。

$a_{ij} = A$ の第 i 行，第 j 列の要素 (ij 要素)

a を $n \times 1$ 行列 (縦ベクトル) とすると,

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と表される。

$a_i = a$ の第 i 要素

a を $1 \times k$ 行列 (横ベクトル) とすると,

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

と表される。

$a_i = a$ の第 i 要素

行列の等号： A, B を $n \times k$ 行列とする。$A = B$ は，すべての $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, k$ について，$a_{ij} = b_{ij}$ を意味する。ただし，a_{ij}, b_{ij} は，それぞれ，A, B の ij 要素とする。

$x = 3, y = 2$ の 2 つの等式を行列で表す。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$$

行列の和と差： A, B を $n \times k$ 行列とする。

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1k} + b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nk} + b_{nk} \end{pmatrix}$$

すなわち，$A + B$ の ij 要素は，$a_{ij} + b_{ij}$ となる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

要素と行列の積： A を $n \times k$ 行列とする。c を スカラー $(1 \times 1$ 行列のこと$)$ とする。

$$cA = c \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & \cdots & ca_{nk} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad c = 5 \qquad \text{のとき}$$

$$cA = 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\times 1 & 5\times 2 \\ 5\times 3 & 5\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

行列と行列の積： A, B を $n \times k$，$k \times n$ 行列とする。

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{k} a_{1m}b_{m1} & \cdots & \sum_{m=1}^{k} a_{1m}b_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{m=1}^{k} a_{nm}b_{m1} & \cdots & \sum_{m=1}^{k} a_{1m}b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

すなわち，AB は $n \times n$ 行列で，AB の ij 要素は，$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{m=1}^{k} a_{ik}b_{kj}$ となる。

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{n} b_{1m}a_{m1} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} b_{1m}a_{mk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{m=1}^{n} b_{km}a_{m1} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} b_{1m}a_{mk} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

すなわち，BA は $k \times k$ 行列で，BA の ij 要素は，$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{ik}a_{kj} = \sum_{m=1}^{k} a_{ik}b_{kj}$ となる。

このように，AB と BA の次元は異なる。

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5\times 1 + 6\times 3 & 5\times 2 + 6\times 4 \\ 7\times 1 + 8\times 3 & 7\times 2 + 8\times 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

一般的に，$AB \neq BA$ となる。

c をスカラーとする。

$$
cAB = AcB = (Ac)B = A(cB) = ABc
$$

c をどこで掛けても値は変わらない。

連立方程式：

$$
\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}
$$

行列表示すると，

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}
$$

となる。

また，

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \\ 9x + 10y + 11z = 12 \end{cases}$$

行列表示すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

となる。

単位行列：　単位行列とは，対角要素 1，その他 0 となる行列であり，I で表す。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I が $n \times n$ 行列のとき，I_n と書くことも多い。

A を $n \times n$ 行列，x を $n \times 1$ 行列 (ベクトル) とする。

$$I_n A = A I_n = A \qquad I_n x = x$$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

逆行列： A を $n \times n$ とする。A の逆行列とは，$AB = I_n$ または $BA = I_n$ となる B を指す。A も B も次元は同じ。

B を A^{-1} と表す。

すなわち，A の逆行列は A^{-1} であり，A^{-1} の逆行列は A である。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のとき，

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -bc + ad \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
AA^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2
\end{aligned}
$$

連立方程式の解：　A を $n \times n$ 行列，x と b を $n \times 1$ 行列 (ベクトル) とする。

$$
Ax = b
$$

両辺に A^{-1} を左から掛ける。

$$
A^{-1}Ax = A^{-1}b
$$

$A^{-1}A = I_n$ なので，

$$
I_n x = A^{-1}b
$$

となる。また，

$$
I_n x = x
$$

なので，x を A, b で表すと，

$$x = A^{-1}b$$

となる。

例

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$$

の行列表示は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

となる。

x, y の解は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

なので，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

すなわち,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1 \times 5 - 2 \times 4} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{1 \times 3} \begin{pmatrix} 5 \times 3 - 2 \times 6 \\ -4 \times 3 + 1 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

例

$$
\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \\ 9x + 10y + 11z = 12 \end{cases}
$$

の行列表示は,

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}
$$

となる。x, y, z の解は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

となる。

転置行列：　A を $n \times k$ 行列とする。
　A の ij 要素を a_{ij} とする。
　A の転置行列 (A' または ${}^{t}A$) の ij 要素は，a_{ji} となる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

A' は $k \times n$ となる。

$$(A')' = A$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

3　最小二乗法について

経済理論に基づいた線型モデルの係数の値をデータから求める時に用いられる手法 $\Longrightarrow$ 最小二乗法

3.1　最小二乗法と回帰直線

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$ のように n 組のデータがあり，X_i と Y_i との間に以下の線型関係を想定する。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i,$$

X_i は説明変数，Y_i は被説明変数，α, β はパラメータとそれぞれ呼ばれる。

上の式は回帰モデル (または，回帰式) と呼ばれる。目的は，切片 α と傾き β をデータ $\{(X_i, Y_i), i = 1, 2, \cdots, n\}$ から推定すること，

データについて：

1. タイム・シリーズ (時系列)・データ： i が時間を表す (第 i 期)。
2. クロス・セクション (横断面)・データ： i が個人や企業を表す (第 i 番目の家計，第 i 番目の企業)。

3.2 切片 α と傾き β の推定

次のような関数 $S(\alpha, \beta)$ を定義する。

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

このとき,

$$\min_{\alpha, \beta} S(\alpha, \beta)$$

となるような α, β を求める (最小自乗法)。このときの解を $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ とする。

最小化のためには,

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$$

を満たす α, β が $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ となる。

すなわち, $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ は,

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}X_i) = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}X_i) = 0, \tag{2}$$

を満たす。

さらに,

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \widehat{\alpha} \sum_{i=1}^{n} X_i + \widehat{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

行列表示によって，

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix},$$

逆行列の公式：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ について，まとめて，

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} X_i \\ -\sum_{i=1}^{n} X_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

さらに，$\widehat{\beta}$ について解くと，

$$\widehat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - (\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{XY}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

連立方程式の (3) 式から，

$$\widehat{\alpha} = \overline{Y} - \widehat{\beta X}$$

となる。ただし，

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

とする。

数値例： 以下の数値例を使って，回帰式 $Y_i = \alpha + \beta X_i$ の α，β の推定値 $\widehat{\alpha}$，$\widehat{\beta}$ を求める。

i	Y_i	X_i
1	6	10
2	9	12
3	10	14
4	10	16

$\widehat{\alpha}$，$\widehat{\beta}$ を求めるための公式は

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{XY}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}$$
$$\widehat{\alpha} = \overline{Y} - \widehat{\beta X}$$

なので，必要なものは $\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ である。

i	Y_i	X_i	X_iY_i	X_i^2
1	6	10	60	100
2	9	12	108	144
3	10	14	140	196
4	10	16	160	256
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum X_iY_i$	$\sum X_i^2$
	35	52	468	696
平均	$\overline{Y}$	$\overline{X}$		
	8.75	13		

よって，

$$\widehat{\beta} = \frac{468 - 4 \times 13 \times 8.75}{696 - 4 \times 13^2} = \frac{13}{20} = 0.65$$
$$\widehat{\alpha} = 8.75 - 0.65 \times 13 = 0.3$$

となる。

注意事項：

1. α, β は真の値で未知

2. $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ は α, β の推定値でデータから計算される

回帰直線は

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_i,$$

として与えられる。

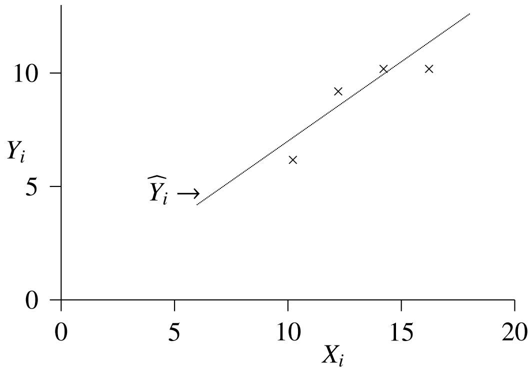
上の数値例では,

$$\widehat{Y}_i = 0.3 + 0.65 X_i$$

となる。

i	Y_i	X_i	$X_i Y_i$	X_i^2	$\widehat{Y}_i$
1	6	10	60	100	6.8
2	9	12	108	144	8.1
3	10	14	140	196	9.4
4	10	16	160	256	10.7
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum X_i Y_i$	$\sum X_i^2$	$\sum \widehat{Y}_i$
	35	52	468	696	35.0
平均	$\overline{Y}$	$\overline{X}$			
	8.75	13			

図 2： Y_i， X_i， $\widehat{Y_i}$



$\widehat{Y_i}$ を実績値 Y_i の予測値または理論値と呼ぶ。

$$\widehat{u_i} = Y_i - \widehat{Y_i},$$

$\widehat{u_i}$ を残差と呼ぶ。

$$Y_i = \widehat{Y_i} + \widehat{u_i} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_i + \widehat{u_i},$$

さらに，$\overline{Y}$ を両辺から引いて，

$$(Y_i - \overline{Y}) = (\widehat{Y}_i - \overline{Y}) + \widehat{u}_i,$$

3.3　残差 $\widehat{u}_i$ の性質について

$\widehat{u}_i = Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}X_i$ に注意して，(1) 式から，

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i = 0,$$

を得る。

(2) 式から，

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\widehat{u}_i = 0,$$

を得る。

$\widehat{Y}_i = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}X_i$ から，

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{Y}_i\widehat{u}_i = 0,$$

を得る。なぜなら，

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \widehat{Y}_i \widehat{u}_i &= \sum_{i=1}^{n} (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_i) \widehat{u}_i \\
&= \widehat{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i + \widehat{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i \widehat{u}_i \\
&= 0
\end{aligned}
$$

である。

i	Y_i	X_i	$\widehat{Y}_i$	$\widehat{u}_i$	$X_i\widehat{u}_i$	$\widehat{Y}_i\widehat{u}_i$
1	6	10	6.8	−0.8	−8.0	−5.44
2	9	12	8.1	0.9	10.8	7.29
3	10	14	9.4	0.6	8.4	5.64
4	10	16	10.7	−0.7	−11.2	−7.49
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum \widehat{Y}_i$	$\sum \widehat{u}_i$	$\sum X_i\widehat{u}_i$	$\sum \widehat{Y}_i\widehat{u}_i$
	35	52	35.0	0.0	0.0	0.00

3.4 決定係数 R^2 について

次の式

$$(Y_i - \overline{Y}) = (\widehat{Y_i} - \overline{Y}) + \widehat{u_i},$$

の両辺を二乗して，総和すると，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big((\widehat{Y_i} - \overline{Y}) + \widehat{u_i}\Big)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y_i} - \overline{Y})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y_i} - \overline{Y})\widehat{u_i} + \sum_{i=1}^{n}\widehat{u_i^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y_i} - \overline{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n}\widehat{u_i^2}
\end{aligned}$$

となる。まとめると，

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y_i} - \overline{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n}\widehat{u_i^2}$$

を得る。さらに，

$$1 = \frac{\sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2} + \frac{\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2}$$

それぞれの項は，

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 \Longrightarrow y$ の全変動

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2 \Longrightarrow \widehat{Y}_i$ (回帰直線) で説明される部分

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2 \Longrightarrow \widehat{Y}_i$ (回帰直線) で説明されない部分

となる。

　回帰式の当てはまりの良さを示す指標として，決定係数 R^2 を以下の通りに定義する。

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2}$$

または,

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2},$$

として書き換えられる。

　または，$Y_i = \widehat{Y}_i + \widehat{u}_i$ と

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i - \overline{Y})(Y_i - \overline{Y} - \widehat{u}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i - \overline{Y})(Y_i - \overline{Y}) - \sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i - \overline{Y})\widehat{u}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i - \overline{Y})(Y_i - \overline{Y})
\end{aligned}$$

を用いて,

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2\right)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 \sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2}$$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 \sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2}} \right)^2$$

と書き換えられる。すなわち，R^2 は Y_i と $\widehat{Y}_i$ の相関係数の二乗と解釈される。

$\displaystyle\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2$ から，明らかに，

$$0 \leq R^2 \leq 1,$$

となる。R^2 が 1 に近づけば回帰式の当てはまりは良いと言える。しかし，t 分布のような数表は存在しない。したがって,「どの値よりも大きくなるべき」というような基準はない。

慣習的には，メドとして 0.9 以上を判断基準にする。

数値例：　決定係数の計算には以下の公式を用いる。

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\overline{Y}^2}$$

計算に必要なものは，$\widehat{u}_i = Y_i - (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_i)$，$\overline{Y}$，$\displaystyle\sum_{i=1}^n Y_i^2$ である。

i	Y_i	X_i	$\widehat{Y}_i$	$\widehat{u}_i$	$\widehat{u}_i$	Y_i^2
1	6	10	6.8	−0.8	0.64	36
2	9	12	8.1	0.9	0.81	81
3	10	14	9.4	0.6	0.36	100
4	10	16	10.7	−0.7	0.49	100
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum \widehat{Y}_i$	$\sum \widehat{u}_i$	$\sum \widehat{u}_i^2$	$\sum Y_i^2$
	35	52	35.0	0.0	2.30	317

$\sum \widehat{u}_i^2 = 2.30$，$\overline{X} = 13$，$\overline{Y} = 8.75$，$\displaystyle\sum_{i=1}^n Y_i^2 = 317$ なので，

$$R^2 = 1 - \frac{2.30}{317 - 4 \times 8.75^2} = 1 - \frac{2.30}{10.75} = 0.786$$

3.5　まとめ

$\widehat{\alpha}$，$\widehat{\beta}$ を求めるための公式は

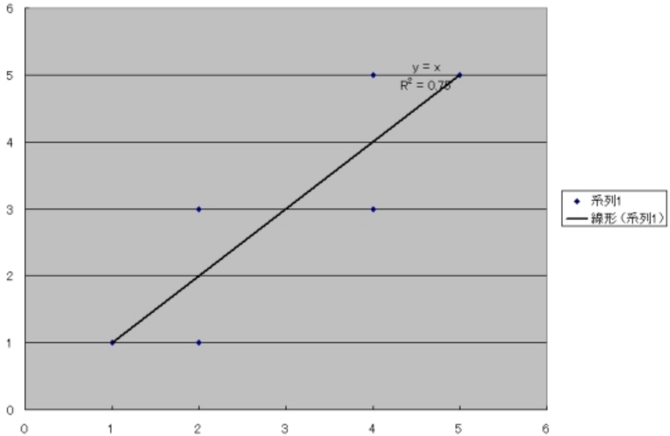
$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{XY}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}$$
$$\widehat{\alpha} = \overline{Y} - \widehat{\beta X}$$

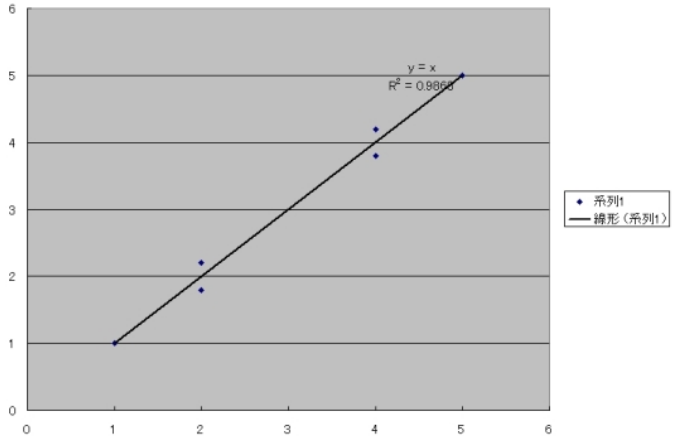
なので，必要なものは $\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ である。

決定係数の計算には以下の公式を用いる。

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\overline{Y}^2}$$

計算に必要なものは，$\sum \widehat{u}_i^2$，$\overline{Y}$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ である。


y = x
R² = 0.75
系列1
線形（系列1）
0
1
2
3
4
5
6



4　統計学の回帰分析への応用

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$ のように n 組のデータがあり，X_i と Y_i との間に線型関係を想定する。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i$$

最小二乗法を用いて，データに直線のあてはめを行った。
$\widehat{\alpha}$，$\widehat{\beta}$，$\widehat{Y_i}$ を求めるための公式は

$$\widehat{\beta}= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$
$$\widehat{\alpha} = \overline{Y} - \widehat{\beta}\overline{X},$$
$$\widehat{Y_i} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}X_i,$$

である。
Y_i，$\widehat{Y_i}$，$\widehat{u_i}$，$\widehat{\alpha}$，$\widehat{\beta}$ の関係は以下の通りである。

$$\begin{aligned} Y_i &= \widehat{Y_i} + \widehat{u_i} \\ &= \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}X_i + \widehat{u_i} \end{aligned}$$

残差 $\widehat{u_i}$ が必ず含まれることから，

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

として誤差項 (または，攪乱項) u_i を含め，それを確率変数として考える。
$\Longrightarrow$ 確率的モデル

Y_i： 被説明変数，従属変数

X_i： 説明変数，独立変数

α, β： 未知母数 (未知パラメータ)

$\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$： 推定量 (特に，最小二乗推定量)

1. 残差 $\widehat{u}_i$ は u_i の実現値としてみなすことができる。
2. $\widehat{\alpha}$，$\widehat{\beta}$ の性質を統計学的に考察可能となる。

統計学の復習 (統計量，推定量，推定値について)

1. 理論標本，理論観測値

$\Longrightarrow X_1, X_2, \cdots, X_n$

$\Longrightarrow$ 確率変数

2. 実現された標本，実現された観測値，実現値

$\Longrightarrow x_1, x_2, \cdots, x_n$

$\Longrightarrow$ 数値

1. 理論観測値 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の関数 $\Longrightarrow$ 統計量

2. すべての i について，$\mu = \mathrm{E}(X_i)$ と仮定する。

3. 母平均 μ の推定に使われる統計量 $\Longrightarrow$ μ の推定量

   (a) $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ は μ の推定量

   (b) $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ は σ^2 の推定量

4. 実現された標本を用いて実際に計算された推定量の値 $\Longrightarrow$ 推定値

   (a) $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ は μ の推定値

(b) $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ は σ^2 の推定値

5. μ や σ^2 の推定量の候補は無数に考えられる。

6. α, β は母数。

7. $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ は α, β の推定量である。

4.1　回帰モデルの仮定

回帰モデル

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

の仮定：

1. X_i は確率変数でないと仮定する (固定された値)。

2. すべての i について，$\mathrm{E}(u_i) = 0$ とする。

3. すべての i について，$\mathrm{V}(u_i) = \sigma^2$ とする。($\mathrm{V}(u_i) = \mathrm{E}(u_i^2) = \sigma^2$ に注意)

4. すべての $i \neq j$ について，$\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = 0$ とする。($\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = \mathrm{E}(u_i u_j) = 0$ に注意)

5. すべての i について，$u_i \sim N(0, \sigma^2)$ とする。

6. $n \longrightarrow \infty$ のとき，$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \longrightarrow \infty$ とする。

撹乱項 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ はそれぞれ独立に平均ゼロ，分散 σ^2 の正規分布する。

再度，まとめて，回帰モデル：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i, \quad u_i \sim N(0, \sigma^2),$$

ただし，

Y_i： 被説明変数，従属変数

X_i： 説明変数，独立変数

α, β, σ^2： 未知母数 (未知パラメータ)

$\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$： 推定量 (特に，最小二乗推定量)

特に，回帰直線は，

$$\mathrm{E}(Y_i) = \alpha + \beta X_i$$

として解釈される。

4.2　誤差項 (攪乱項) の経済学的意味

1. 経済理論自身が不完全： X 以外にも他の説明変数が必要であるにもかかわらず，それを誤って除いている可能性がある。

2. モデルの定式化が不完全： Y と X との間の線形関係が誤りかもしれない。

3. 理論モデルとデータとの対応： 理論モデルで考えられる変数と実際に用いたデータが適当でないかもしれない。例： 所得のデータについては国民総生産，国民所得，可処分所得，労働所得 …，金利では公定歩合，国債利回り，定期預金金利，全国銀行平均約定金利 …

4. 測定上の誤差： 経済データは一般的に推計されているため完全ではない。誤差を含む。

4.3 $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の統計的性質

準備：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

$$\overline{Y} = \alpha + \beta\overline{X} + \overline{u},$$

ただし，

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i,$$

とする。辺々を引いて，

$$Y_i - \overline{Y} = \beta(X_i - \overline{X}) + (u_i - \overline{u}),$$

を得る。

4.3.1 $\widehat{\beta}$ について

β の最小二乗推定量 $\widehat{\beta}$ に代入すると，

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})\Big(\beta(X_i - \overline{X}) + (u_i - \overline{u})\Big)}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})\Big(\beta(X_i - \overline{X})\Big)}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\
&\quad + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(u_i - \overline{u})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\
&= \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})u_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}
\end{aligned}$$

である。途中の計算で，$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})\overline{u} = 0$ に注意せよ。

よって，まとめると，

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\
&= \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})u_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\
&= \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i,
\end{aligned}
$$

となる。ただし，$\omega_i = \dfrac{(X_i - \overline{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$ とする。

4.3.2 $\widehat{\alpha}$ について

α の最小二乗推定量 $\widehat{\alpha}$ については，

$$
\begin{aligned}
\widehat{\alpha} &= \overline{Y} - \widehat{\beta X} \\
&= \alpha - (\widehat{\beta} - \beta)\overline{X} + \overline{u}
\end{aligned}
$$

ただし，$\overline{u} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$ である。$\overline{Y} = \alpha + \beta\overline{X} + \overline{u}$ を途中で使う。

4.3.3　$\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の平均

統計学の復習 (期待値の公式)：

1. X を確率変数とする。

$$\mathrm{E}(a + bX) = a + b\mathrm{E}(X),$$

となる。ただし，a, b は定数とする。

2. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の n 個の確率変数を考える。このとき，

$$\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(c_i X_i), = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathrm{E}(X_i),$$

となる。ただし，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ は定数とする。

$\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の平均：　$\widehat{\beta}$ は次のように書き換えられた。

$$\widehat{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i,$$

の両辺に期待値をとると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\widehat{\beta}) &= \mathrm{E}(\beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i) \\
&= \beta + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(\omega_i u_i) \\
&= \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathrm{E}(u_i) \\
&= \beta,
\end{aligned}$$

となり，$\widehat{\beta}$ は β の不偏推定量であると言える。
　$\widehat{\alpha}$ については，

$$\widehat{\alpha} = \alpha - (\widehat{\beta} - \beta)\overline{X} + \overline{u}$$

を利用して，辺々に期待値をとると，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\widehat{\alpha}) &= \alpha - \mathrm{E}(\widehat{\beta} - \beta)\overline{X} + \mathrm{E}(\overline{u}) \\ &= \alpha\end{aligned}$$

となる。$\mathrm{E}(\widehat{\beta} - \beta) = 0$ に注意。また，$\mathrm{E}(\overline{u})$ の計算は以下のとおり。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\overline{u}) &= \mathrm{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(u_i) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\widehat{\alpha}$ は α の不偏推定量であると言える。

4.3.4 $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の分散

統計学の復習 (分散の公式)：

1. X を確率変数とする。

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X - \mu)^2,$$

となる。ただし，$\mu = \mathrm{E}(X)$ とする。

2. X を確率変数とする。

$$\mathrm{V}(a + bX) = \mathrm{V}(bX) = b^2\mathrm{V}(X),$$

となる。ただし，a, b は定数とする。

3. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の n 個の確率変数は互いに独立とする。このとき,

$$\mathrm{V}(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \mathrm{V}(X_i),$$

となる。ただし，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ は定数とする。

$\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の分散： $\widehat{\beta}$ の分散について，$\widehat{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i$ を用いると,

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\widehat{\beta}) &= \mathrm{V}(\beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i) \\ &= \mathrm{V}(\sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \mathrm{V}(u_i^2) \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}
\end{aligned}
$$

誤差項 (または，攪乱項) の仮定より，

$$
\mathrm{V}(u_i) = \sigma^2,
$$

を用いる。

最後の行は，$\omega_i = \dfrac{X_i - \overline{X}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$ に注意して，

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}
\end{aligned}
$$

を用いる。

よって，$\widehat{\beta}$ の平均は β，分散は $\dfrac{\sigma^2}{\sum(X_i - \overline{X})^2}$ となることが示された。

$\widehat{\alpha}$ の分散について，$\widehat{\alpha} = \alpha - (\widehat{\beta} - \beta)\overline{X} + \overline{u}$ を利用すると，

$$
\begin{aligned}
V(\widehat{\alpha}) &= E(\widehat{\alpha} - \alpha)^2 \\
&= E(-(\widehat{\beta} - \beta)\overline{X} + \overline{u})^2 \\
&= \overline{X}^2 E(\widehat{\beta} - \beta)^2 - 2\overline{X}E((\widehat{\beta} - \beta)\overline{u}) + E(\overline{u}^2) \\
&= \sigma^2 \left(\frac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} + \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}
\end{aligned}
$$

途中で，以下の計算が使われる。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}((\widehat{\beta}-\beta)\overline{u})\\
&= \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})u_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\\
&= \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})u_i\sum_{j=1}^{n}u_j\right)\\
&= \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i-\overline{X})\mathrm{E}(u_iu_j)\\
&= \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\sigma^2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})=0$ であることに注意。

$$
\mathrm{E}(\overline{u}^2)=\mathrm{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i)^2
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2}\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i u_j) \\
&= \frac{1}{n^2}\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} u_i^2) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(u_i^2) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

よって，$\widehat{\alpha}$ の平均は α，分散は $\dfrac{\sigma^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$ となることが示された。

$\widehat{\alpha}$ と $\widehat{\beta}$ の共分散について，$\widehat{\alpha}=\alpha-(\widehat{\beta}-\beta)\overline{X}+\overline{u}$ を利用すると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\widehat{\alpha},\widehat{\beta}) &= \mathrm{E}((\widehat{\alpha}-\alpha)(\widehat{\beta}-\beta)) \\
&= \mathrm{E}((-(\widehat{\beta}-\beta)\overline{X}+\overline{u})(\widehat{\beta}-\beta))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathrm{E}(\widehat{\beta}-\beta)^2\overline{X} + \mathrm{E}(\overline{u}(\widehat{\beta}-\beta)) \\
&= -\mathrm{E}(\widehat{\beta}-\beta)^2\overline{X} \\
&= -\frac{\sigma^2\overline{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}
\end{aligned}
$$

となる。

数値例：

i	Y_i	X_i	X_iY_i	X_i^2
1	6	10	60	100
2	9	12	108	144
3	10	14	140	196
4	10	16	160	256
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum X_iY_i$	$\sum X_i^2$
	35	52	468	696
平均	$\overline{Y}$	$\overline{X}$		
	8.75	13		

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\widehat{\beta}) &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{696 - 4 \times 13^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{20} \\
&= 0.05\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\widehat{\alpha}) &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\
&= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2)} \\
&= \frac{\sigma^2 696}{4(696 - 4 \times 13^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{696\sigma^2}{80} \\
&= 8.7\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) &= -\frac{\sigma^2 \overline{X}}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} \\
&= -\frac{\sigma^2 \overline{X}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2} \\
&= -\frac{13\sigma^2}{696 - 4 \times 13^2} \\
&= -0.65\sigma^2
\end{aligned}
$$

注意： 最小二乗法を復習すると，まず，次のような関数 $S(\alpha, \beta)$ を定義する。

$$
S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2
$$

$S(\alpha,\beta)$ の最小化によって，

$$\frac{\partial S(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial S(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = 0$$

を満たす α,β が $\widehat{\alpha},\widehat{\beta}$ となる。

すなわち，$\widehat{\alpha},\widehat{\beta}$ は，

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}X_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}X_i) = 0$$

を満たす。

さらに，

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \widehat{\alpha} \sum_{i=1}^{n} X_i + \widehat{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

行列表示によって，

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix},$$

$\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ について，まとめて，

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & -\sum_{i=1}^n X_i \\ -\sum_{i=1}^n X_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

逆行列の部分と分散，共分散とは以下のような関係がある。

$$\begin{pmatrix} \mathrm{V}(\widehat{\alpha}) & \mathrm{Cov}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) \\ \mathrm{Cov}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) & \mathrm{V}(\widehat{\beta}) \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma^2 \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{\sigma^2}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & -\sum_{i=1}^n X_i \\ -\sum_{i=1}^n X_i & n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum (X_i - \overline{X})^2} & -\dfrac{\sigma^2 \overline{X}}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \\ -\dfrac{\sigma^2 \overline{X}}{\sum (X_i - \overline{X})^2} & \dfrac{\sigma^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4.3.5 $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の分布 (σ^2 が既知の場合)

統計学の復習 (正規分布について):

1. n 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が同一の分布に従うものとする。このとき,

$$
\mathrm{E}(\sum_{i=1}^n c_i X_i) = \sum_{i=1}^n c_i \mathrm{E}(X_i),
$$

$$\mathrm{V}(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \mathrm{V}(X_i),$$

となる。

2. n 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が同一の正規分布に従うものとする。このとき，

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \sim N\Big(\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i), \mathrm{V}(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i)\Big)$$

となる。すなわち，

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \sim N\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i \mathrm{E}(X_i), \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \mathrm{V}(X_i)\Big)$$

3. 特に，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$，標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ を考えると，

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

となる。(すべての i について，$c_i = \dfrac{1}{n}$ の場合を考えればよい。)

$\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の分布:

1. $\widehat{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i$

2. $\mathrm{E}(\widehat{\beta}) = \beta$

3. $\mathrm{V}(\widehat{\beta}) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$

よって,

$$\widehat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}\right),$$

となる。

1. $\widehat{\alpha} = \alpha - (\widehat{\beta} - \beta)\overline{X} + \overline{u}$

2. $\mathrm{E}(\widehat{\alpha}) = \alpha$

3. $\mathrm{V}(\widehat{\alpha}) = \sigma^2 \left(\dfrac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} + \dfrac{1}{n} \right)$

よって,

$$\widehat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \sigma^2\left(\frac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} + \frac{1}{n}\right)\right),$$

となる。

4.3.6 $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の性質：最良線型不偏性と一致性

統計学の復習 (推定量の望ましい性質)：　$\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の性質を求めるために

1. 不偏性：

   ある母集団のある母数 θ に対して，θ の推定量として $\widehat{\theta}$ を考える。

   このとき,

   $$\mathrm{E}(\widehat{\theta}) = \theta$$

   となるとき，$\widehat{\theta}$ は θ の不偏推定量であると言う。

   $\widehat{\theta}$ は不偏性を持つと言う。

   $\mathrm{E}(\widehat{\theta}) - \theta$ は偏りと定義される。

(a) 標本平均 $\overline{X}$ は μ の不偏推定量である。

証明：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\overline{X}) &= \mathrm{E}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

このように，$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu$ なので，標本平均 $\overline{X}$ は μ の不偏推定量となる。

2. 有効性 (最小分散性)：

ある母数 θ に対して，$\widehat{\theta}_1$ と $\widehat{\theta}_2$ の 2 つの不偏推定量を考える。

このとき，$\mathrm{V}(\widehat{\theta}_1) \leq \mathrm{V}(\widehat{\theta}_2)$ が成り立つとき，$\widehat{\theta}_1$ は $\widehat{\theta}_2$ より有効であると言う。

ある母数 θ に対して，可能なすべての不偏推定量を考え，$\widehat{\theta}$ が最も小さな分散を持つ不偏推定量であるとする。

このとき，$\widehat{\theta}$ を最小分散不偏推定量，または，最良不偏推定量と言う。

(a) 推定量 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ の中で，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ が最も小さな分散を持つ推定量となる。

$\Longrightarrow$ 最良線型不偏推定量

3. 一致性：

ある母数 θ について推定量 $\widehat{\theta}$ を考える。n 個の標本から構成された推定量を $\widehat{\theta}^{(n)}$ と定義する。

数列 $\widehat{\theta}^{(1)}, \widehat{\theta}^{(2)}, \cdots, \widehat{\theta}^{(n)}, \cdots$ を考える。

十分大きな n について，$\widehat{\theta}^{(n)}$ が θ に確率的に収束するとき，$\widehat{\theta}$ は θ の一致推定量であると言う。

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \widehat{\theta} = \theta$$

と表現する。

(a) $\mathrm{E}(\widehat{\theta}) = \theta$ とする。$n \to \infty$ のとき，$\mathrm{V}(\widehat{\theta}) \to 0$ が成り立てば，$\widehat{\theta}$ は θ の一致推定量である。

(b) μ の推定量 $\overline{X}$ を調べる。

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu$$

である。

$$\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

となる。$n \to \infty$ のとき，

$$\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow 0$$

となるので，$\overline{X}$ は μ の一致推定量であると言える。

$\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の最良線型不偏性と一致性

不偏性： 既に証明したとおり，$\mathrm{E}(\widehat{\beta}) = \beta$，$\mathrm{E}(\widehat{\alpha}) = \alpha$ なので，$\widehat{\alpha}$，$\widehat{\beta}$ は β，α の不偏推定量である。

最良線型不偏性：　$\widehat{\beta}$ を変形すると以下の通りとなる。

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \omega_i Y_i
\end{aligned}$$

ただし，$\omega_i = \dfrac{(X_i - \overline{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$ とする。このように，$\widehat{\beta}$ は線型不偏推定量であると言える。

別の線型不偏推定量を次のように考える。

$$\widetilde{\beta} = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i$$

ただし，$c_i = \omega_i + d_i$ とする。$\widetilde{\beta}$ もまた β の不偏推定量と仮定したので，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\beta} &= \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i)(\alpha + \beta X_i + u_i) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} \omega_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i \\
&\quad + \alpha \sum_{i=1}^{n} d_i + \beta \sum_{i=1}^{n} d_i X_i + \sum_{i=1}^{n} d_i u_i \\
&= \beta + \alpha \sum_{i=1}^{n} d_i + \beta \sum_{i=1}^{n} d_i X_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i + \sum_{i=1}^{n} d_i u_i
\end{aligned}
$$

と変形される。$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 0$，$\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i = 1$ に注意。

よって，期待値をとると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\widetilde{\beta}) &= \beta + \alpha \sum_{i=1}^{n} d_i + \beta \sum_{i=1}^{n} d_i X_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathrm{E}(u_i) + \sum_{i=1}^{n} d_i \mathrm{E}(u_i) \\
&= \beta + \alpha \sum_{i=1}^{n} d_i + \beta \sum_{i=1}^{n} d_i X_i
\end{aligned}
$$

となる。$\widetilde{\beta}$ が不偏であるためには，

$$
\sum_{i=1}^{n} d_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} d_i X_i = 0,
$$

の条件が必要となる。

この 2 つの条件が成り立っていると仮定すると，

$$
\widetilde{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i) u_i
$$

を利用して，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\widetilde{\beta}) &= \mathrm{E}(\widetilde{\beta} - \beta)^2 \\
&= \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i) u_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i)^2 \mathrm{E}(u_i^2) \\
&= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i d_i + \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \right) \\
&= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \right)
\end{aligned}
$$

$\widetilde{\beta}$ の不偏性の条件 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$，$\sum_{i=1}^{n} d_i X_i = 0$ を利用すると，

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \omega_i d_i &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) d_i}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i d_i - \overline{X} \sum_{i=1}^{n} d_i}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} = 0
\end{aligned}
$$

を得る。

まとめると，$\widetilde{\beta}$ の分散は，

$$\mathrm{V}(\widetilde{\beta}) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \right)$$

となる。$\widehat{\beta}$ の分散は，

$$\mathrm{V}(\widehat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2$$

なので，

$$\mathrm{V}(\widetilde{\beta}) \geq \mathrm{V}(\widehat{\beta})$$

となる。等号が成り立つときは，$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = 0$，すなわち，$d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$ のときとなり，これは $\widehat{\beta}$ に一致する。

よって，$\widehat{\beta}$ は最小分散線型不偏推定量，または，最良線型不偏推定量であると言える。

$\Longrightarrow$ ガウス=マルコフの定理

$\widehat{\alpha}$ についても，同様で，α の最小分散線型不偏推定量となる。

証明は，

$$\widehat{\alpha} - \alpha = -(\widehat{\beta} - \beta)\overline{X} + \overline{u}$$

を利用すればよい。

推定量の関係 $\Longrightarrow$
最小分散 (最良) 線型不偏推定量 $\subset$ 線型不偏推定量 $\subset$ 線型推定量 $\subset$ 全推定量

一致性： $\mathrm{E}(\widehat{\beta}) = \beta$ となることが分かった。
n が大きくなると，$\widehat{\beta}$ は β に近づくかどうかを調べる。

$$\mathrm{V}(\widehat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\mathrm{V}(\widehat{\beta}) \longrightarrow 0$ となれば，$\widehat{\beta}$ は β の一致推定量となる。

最小二乗法の仮定の一つに,「$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \longrightarrow \infty$」というものがあった。この仮定は,「$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\mathrm{V}(\widehat{\beta}) \longrightarrow 0$」を保証する。よって，$\widehat{\beta}$ は β の一致推定量である。

$\widehat{\alpha}$ についても，同様に，$\mathrm{E}(\widehat{\alpha}) = \alpha$ であることは分かっている。

$$\mathrm{V}(\widehat{\alpha}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} \right)$$

となり,「$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\mathrm{V}(\widehat{\alpha}) \longrightarrow 0$」となるので，$\widehat{\alpha}$ も α の一致推定量であると言える。

4.4　誤差項 (または，攪乱項) u_i の分散 σ^2 について

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

誤差項 (または，攪乱項) の仮定：$u_i \sim N(0, \sigma^2)$

$$Y_i = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_i + \widehat{u}_i,$$

u_i の分散 σ^2 の不偏推定量：

$$\frac{\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2}{\text{自由度}}$$