$$\begin{aligned}\text{自由度} &= \text{標本数}\,(n) - \text{推定すべき係数値の数}\,(2) \\ &= n-2\end{aligned}$$

誤差項 (または，攪乱項) の母分散 σ^2 の不偏推定量 s^2 は，

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2, = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}X_i)^2,$$

によって与えられる。

s^2 の不偏性の証明： まず，次のように書き直す。

$$\begin{aligned} u_i &= Y_i - \alpha - \beta X_i \\ &= (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}X_i + \widehat{u}_i) - \alpha - \beta X_i \\ &= (\widehat{\alpha} - \alpha) + (\widehat{\beta} - \beta)X_i + \widehat{u}_i, \end{aligned}$$

両辺を二乗する。

$$\begin{aligned} u_i^2 = {} & (\widehat{\alpha} - \alpha)^2 + (\widehat{\beta} - \beta)^2 X_i^2 + \widehat{u}_i^2 \\ & + 2(\widehat{\alpha} - \alpha)(\widehat{\beta} - \beta)X_i \\ & + 2(\widehat{\alpha} - \alpha)\widehat{u}_i \\ & + 2(\widehat{\beta} - \beta)X_i\widehat{u}_i \end{aligned}$$

総和をとる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} u_i^2 &= n(\widehat{\alpha}-\alpha)^2 + (\widehat{\beta}-\beta)^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2 \\
&+ 2(\widehat{\alpha}-\alpha)(\widehat{\beta}-\beta) \sum_{i=1}^{n} X_i \\
&+ 2(\widehat{\alpha}-\alpha) \sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i \\
&+ 2(\widehat{\beta}-\beta) \sum_{i=1}^{n} X_i \widehat{u}_i \\
&= n(\widehat{\alpha}-\alpha)^2 + (\widehat{\beta}-\beta)^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2 \\
&+ 2n(\widehat{\alpha}-\alpha)(\widehat{\beta}-\beta)\overline{X}
\end{aligned}
$$

期待値をとる。

$$
\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} u_i^2) = n\mathrm{E}(\widehat{\alpha}-\alpha)^2 + \mathrm{E}(\widehat{\beta}-\beta)^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2
$$

$$+ \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} \widehat{u_i^2}) + 2n\mathrm{E}((\widehat{\alpha} - \alpha)(\widehat{\beta} - \beta))\overline{X}$$

$$\begin{aligned} n\sigma^2 &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} + \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\ &+ \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} \widehat{u_i^2}) - \frac{2n\sigma^2\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\ &= 2\sigma^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \right) + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} \widehat{u_i^2}) \\ &= 2\sigma^2 + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} \widehat{u_i^2}) \end{aligned}$$

途中の計算には以下が使われる。

$$\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} u_i^2) = n\sigma^2$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\widehat{\alpha}-\alpha)^2 &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2} \\
\mathrm{E}(\widehat{\beta}-\beta)^2 &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2} \\
\mathrm{E}((\widehat{\alpha}-\alpha)(\widehat{\beta}-\beta)) &= -\frac{\sigma^2\overline{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\mathrm{E}(s^2) = \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2}{n-2}\right) = \sigma^2
$$

を得る。すなわち，s^2 は σ^2 の不偏推定量である。

統計学の復習 (χ^2 分布)：　m 個の確率変数 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_m$ は，互いに独立な標準正規分布に従うものとする。このとき，$Y = \sum_{i=1}^m Z_i^2$ は，自由度 m の χ^2 分布に従う。

$Y \sim \chi^2(m)$，または，$Y \sim \chi^2_m$ と表記する。

χ^2 (カイ二乗) 分布表から確率を求める。

$Y \sim \chi^2(m)$ のとき，$\mathrm{E}(Y) = m$，$\mathrm{V}(Y) = 2m$ となる。(証明略)

1. 2 つの独立な χ^2 分布からの確率変数 X, Y を考える。$X \sim \chi^2(n)$，$Y \sim \chi^2(m)$ とする。このとき，$Z = X + Y \sim \chi^2(n + m)$ となる。(証明略)

2. n 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする。

3. $\dfrac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ なので，$\left(\dfrac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$ となる。
   $\dfrac{X_1 - \mu}{\sigma}, \dfrac{X_2 - \mu}{\sigma}, \cdots, \dfrac{X_n - \mu}{\sigma}$ はそれぞれ独立なので，

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

   となる。

4. μ を $\overline{X}$ に置き換えると，

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

となる。(証明は後述)

さらに,

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

を定義すると,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

となる。S^2 は σ^2 の不偏推定量である (後述)。

5. すなわち,

$$\mathrm{E}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n-1,$$

$$\mathrm{V}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1),$$

となる。

回帰分析に当てはめる。

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \alpha - \beta X_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n),$$

α, β を推定値に置き換えると,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} X_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

となる。さらに,

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} X_i)^2,$$

なので,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2}{\sigma^2} = \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

を得る。

s^2 の一致性の証明: s^2 は

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \widehat{u}_i^2 \\ &= \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} X_i)^2 \end{aligned}$$

と定義される。

$\dfrac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$ なので (証明略),

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}\right) &= n-2, \\
\mathrm{V}\left(\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}\right) &= 2(n-2),
\end{aligned}
$$

となる。さらに，書き直すと，

$$
\begin{aligned}
\frac{(n-2)^2}{\sigma^4}\mathrm{V}(s^2) &= 2(n-2), \\
\mathrm{V}(s^2) &= \frac{2\sigma^4}{n-2},
\end{aligned}
$$

を得る。「$\mathrm{E}(s^2)=\sigma^2$ で，しかも，$n \longrightarrow \infty$ のとき $\mathrm{V}(s^2) \longrightarrow 0$」が言えるので，$s^2$ は σ^2 の一致推定量である。

標準誤差について：　標準誤差 = 不偏分散の平方根

誤差項 (または，攪乱項) の標準誤差 s

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2}{n-2}}$$

数値例： $\widehat{\alpha} = 0.3, \widehat{\beta} = 0.65$ なので，$\widehat{Y}_i = 0.3 + 0.65X_i, \widehat{u}_i = Y_i - 0.3 - 0.65X_i$ により，$\widehat{Y}_i, \widehat{u}_i$ を計算する。

i	Y_i	X_i	X_iY_i	X_i^2	$\widehat{Y}_i$	$\widehat{u}_i$
1	6	10	60	100	6.8	−0.8
2	9	12	108	144	8.1	0.9
3	10	14	140	196	9.4	0.6
4	10	16	160	256	10.7	−0.7
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum X_iY_i$	$\sum X_i^2$	$\sum \widehat{Y}_i$	$\sum \widehat{u}_i$
	35	52	468	696	35	0
平均	$\overline{Y}$	$\overline{X}$				
	8.75	13				

誤差項 (または，攪乱項) の母分散 σ^2 の不偏推定量 s^2 は，

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2 \\
&= \frac{1}{2}((-0.8)^2 + 0.9^2 + 0.6^2 + (-0.7)^2) \\
&= 1.15
\end{aligned}
$$

によって与えられる。

s は「回帰の標準誤差 (Standard Error of Regression)」と呼ばれ，この例では，$s = \sqrt{1.15} = 1.07$ となる。

4.4.1 $\widehat{\alpha}$，$\widehat{\beta}$ の分散の不偏推定量

$\widehat{\alpha}$ と $\widehat{\beta}$ の分散は，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\widehat{\alpha}) = \sigma_{\widehat{\alpha}}^2 &= \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} \\
\mathrm{V}(\widehat{\beta}) = \sigma_{\widehat{\beta}}^2 &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}
\end{aligned}
$$

によって，与えられる。

σ^2 をその不偏分散 s^2 に置き換えることによって，$\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の分散の不偏推定量を次のように得ることができる。

$$s_{\widehat{\alpha}}^2 = \frac{s^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}$$

$$s_{\widehat{\beta}}^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}$$

さらに，平方根をとって，$\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の標準誤差はそれぞれ，

$$s_{\widehat{\alpha}} = s\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}}$$

$$s_{\widehat{\beta}} = \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}}$$

として与えられる。

数値例：　$\widehat{\alpha} = 0.3, \widehat{\beta} = 0.65$ なので，$\widehat{Y_i} = 0.3 + 0.65X_i, \widehat{u_i} = Y_i - 0.3 - 0.65X_i$ により，$\widehat{Y_i}, \widehat{u_i}$ を計算する。

i	Y_i	X_i	X_iY_i	X_i^2	$\widehat{Y_i}$	$\widehat{u_i}$
1	6	10	60	100	6.8	−0.8
2	9	12	108	144	8.1	0.9
3	10	14	140	196	9.4	0.6
4	10	16	160	256	10.7	−0.7
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum X_iY_i$	$\sum X_i^2$	$\sum \widehat{Y_i}$	$\sum \widehat{u_i}$
	35	52	468	696	35	0
平均	$\overline{Y}$	$\overline{X}$				
	8.75	13				

$s^2 = 1.15$ なので,

$$
\begin{aligned}
s_{\widehat{\beta}}^2 &= \frac{s^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} \\
&= \frac{s^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2} \\
&= 0.05 \times 1.15 \\
&= 0.0575
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_{\widehat{\alpha}}^2 &= \frac{s^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} \\
&= \frac{s^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2)} \\
&= 8.7 \times 1.15 \\
&= 10.005
\end{aligned}
$$

$\widehat{\alpha}$，$\widehat{\beta}$ の標準誤差はそれぞれ，平方根をとって，

$$
\begin{aligned}
s_{\widehat{\beta}} &= \sqrt{0.0575} = 0.240 \\
s_{\widehat{\alpha}} &= \sqrt{10.005} = 3.163
\end{aligned}
$$

となる。

4.5 $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ の分布

4.5.1 統計学の復習 (t 分布)

正規分布の重要な定理： n 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする。このとき，

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \sim N(\mu \sum_{i=1}^{n} c_i, \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2)$$

となる。ただし，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ は定数とする。

t 分布： Z を標準正規分布，Y を自由度 m の χ^2 分布に従い，両者は独立な確率変数とする。このとき，$U = \dfrac{Z}{\sqrt{Y/m}}$ は，自由度 m の t 分布に従う。

$U \sim t(m)$，または，$U \sim t_m$ と表記する。

$U \sim t(m)$ のとき，$m > 1$ について $\mathrm{E}(U) = 0$，$m > 2$ について $\mathrm{V}(U) = \dfrac{m}{m-2}$ となる。(証明略)

t 分布表から確率を求める。(表 **??** を見よ)

1. ゼロを中心に左右対称。($\mathrm{E}(U) = 0$)

2. t 分布は，標準正規分布より裾野の広い分布 (なぜなら，$\mathrm{V}(U) = \dfrac{m}{m-2} > 1$)

3. $m \longrightarrow \infty$ のとき，$t(m) \longrightarrow N(0,1)$ となる。(期待値は $m > 1$ について $\mathrm{E}(U) = 0$，分散は $\mathrm{V}(U) = \dfrac{m}{m-2} \longrightarrow 1$)

標本平均 $\overline{X}$ の分布： $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の n 個の確率変数は，互いに独立で，平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。

1. $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$ なので，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ となる。

2. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ である。(証明は略)

3. $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ と $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ は独立。(証明は略)

   すなわち，$\overline{X}$ と S^2 は独立。

4. したがって，

$$\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/ n-1}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

を得る。

重要な結果は，

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

ただし，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ である。

σ^2 を S^2 に置き換えると，正規分布から t 分布になる。

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)\quad\Longrightarrow\quad\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

4.5.2 $\widehat{\beta}$ について：

$$\widehat{\beta} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})u_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$
$$= \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i$$

$u_i \sim N(0, \sigma^2)$ で，かつ，それぞれ独立に分布する。また，$\widehat{\beta}$ の平均，分散はそれぞれ，

$$\mathrm{E}(\widehat{\beta}) = \beta,$$
$$\mathrm{V}(\widehat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2},$$

となるので，

$$\widehat{\beta} \sim N(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}),$$

を得る。変形すると，

$$\frac{\widehat{\beta}-\beta}{\sigma/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} \sim N(0,1),$$

となる。

さらに，

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

となり (証明略)，$\widehat{\beta}$ とは独立なので (証明略)，

$$\frac{\dfrac{\widehat{\beta}-\beta}{\sigma/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}}{\sqrt{\dfrac{(n-2)s^2}{\sigma^2}/(n-2)}}$$

$$= \frac{\widehat{\beta}-\beta}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} \sim t(n-2)$$

4.5.3 $\widehat{\alpha}$ について：

また，$\widehat{\alpha}$ の平均，分散はそれぞれ，

$$\mathrm{E}(\widehat{\alpha}) = \alpha,$$
$$\mathrm{V}(\widehat{\alpha}) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2},$$

となるので，

$$\widehat{\alpha} \sim N(\alpha, \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}),$$

を得る。変形すると，

$$\frac{\widehat{\alpha} - \alpha}{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2 / n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}} \sim N(0, 1),$$

となる。

さらに，σ を s で置き換えると，

$$\frac{\widehat{\alpha} - \alpha}{s \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2 / n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}} \sim t(n-2),$$

となる。

4.5.4　まとめ：

$$\frac{\widehat{\beta}-\beta}{s_{\widehat{\beta}}}=\frac{\widehat{\beta}-\beta}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}\sim t(n-2),$$

$$\frac{\widehat{\alpha}-\alpha}{s_{\widehat{\alpha}}}=\frac{\widehat{\alpha}-\alpha}{s\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}}\sim t(n-2),$$

4.6　α, β の区間推定 (信頼区間)

4.6.1　統計学の復習：区間推定 (信頼区間)

$\overline{X}$ の分布を利用して，μ の信頼区間を求める。

1. $\overline{X}$ の分布は以下の通り。

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

となる。

2. $t_{\alpha/2}(n-1)$，$t_{1-\alpha/2}(n-1)$ を自由度 $n-1$ の t 分布の上から $100 \times \frac{\alpha}{2}$ % 点，$100 \times (1-\frac{\alpha}{2})$ % 点の値とする。このとき，

$$\mathrm{Prob}\left(t_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

となる。ただし，自由度と α が決まれば，$t_{\alpha/2}(n-1)$，$t_{1-\alpha/2}(n-1)$ は t 分布表から得られる。

3. t 分布は左右対称なので，

$$t_{1-\alpha/2}(n-1) = -t_{\alpha/2}(n-1)$$
$$t_{\alpha/2}(n-1) = |t_{1-\alpha/2}(n-1)|$$
$$t_{1-\alpha/2}(n-1) = -|t_{\alpha/2}(n-1)|$$

となる。

4. 書き直して，

$$\mathrm{Prob}\Big(\ \overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\ \Big) = 1 - \alpha$$

となる。

5. μ が区間 $(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$ にある確率は $1-\alpha$ である。

6. 推定量 $\overline{X}$，S^2 をその推定値 $\overline{x}$，s^2 で置き換える。ただし，$\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$，$s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ とする。

7. 区間 $(\overline{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$ を信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間といい，$\overline{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$ を信頼下限，$\overline{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$ を信頼上限と呼ぶ。

4.6.2　α，$\boldsymbol{\beta}$ の区間推定 (信頼区間)

$\widehat{\alpha}$，$\widehat{\beta}$ の分布は，以下のように得られた。

$$\frac{\widehat{\beta}-\beta}{s_{\widehat{\beta}}} \sim t(n-2),$$

$$\frac{\widehat{\alpha}-\alpha}{s_{\widehat{\alpha}}} \sim t(n-2),$$

$t_{\alpha/2}(n-2)$，$t_{1-\alpha/2}(n-2)$ をそれぞれ自由度 $n-2$ の t 分布の上側から $100\times\dfrac{\alpha}{2}$ % 点， $100\times(1-\dfrac{\alpha}{2})$ % 点の値とする。このとき，

$$\mathrm{Prob}\Big(t_{1-\alpha/2}(n-2) < \frac{\widehat{\beta}-\beta}{s_{\widehat{\beta}}} < t_{\alpha/2}(n-2)\Big) = 1-\alpha,$$

すなわち，$t_{1-\alpha/2}(n-2) = -t_{\alpha/2}(n-2)$ により，

$$\mathrm{Prob}\Big(-t_{\alpha/2}(n-2) < \frac{\widehat{\beta}-\beta}{s_{\widehat{\beta}}} < t_{\alpha/2}(n-2)\Big) = 1-\alpha,$$

となる。ただし，自由度と α が決まれば，$t_{\alpha/2}(n-2)$ は t 分布表から得られる。

書き直して，

$$\mathrm{Prob}\Big(\widehat{\beta} - t_{\alpha/2}(n-2)s_{\widehat{\beta}} < \beta < \widehat{\beta} + t_{\alpha/2}(n-2)s_{\widehat{\beta}}\Big) = 1-\alpha,$$

と表される。

したがって，$\widehat{\beta}$，$s_{\widehat{\beta}}$ を推定値で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の β の信頼区間は，

$$\Big(\widehat{\beta} - t_{\alpha/2}(n-2)s_{\widehat{\beta}},\ \widehat{\beta} + t_{\alpha/2}(n-2)s_{\widehat{\beta}}\Big)$$

となる。

同様に，信頼係数 $1-\alpha$ の α の信頼区間は，

$$\Big(\widehat{\alpha} - t_{\alpha/2}(n-2)s_{\widehat{\alpha}},\ \widehat{\alpha} + t_{\alpha/2}(n-2)s_{\widehat{\alpha}}\Big)$$

となる。

数値例：　今までと同様に，以下の数値例をとりあげる。

i	Y_i	X_i
1	6	10
2	9	12
3	10	14
4	10	16

回帰モデル $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ を推定した結果，以下の推定値を得た。

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= 0.65, \\
\widehat{\alpha} &= 0.3, \\
s_{\widehat{\beta}} &= \sqrt{0.0575} = 0.240, \\
s_{\widehat{\alpha}} &= \sqrt{10.005} = 3.163,
\end{aligned}$$

$t_{0.025}(2) = 4.303$ なので，信頼係数 0.95 の β の信頼区間は，

$$(0.65 - 4.303 \times 0.240,\ 0.65 + 4.303 \times 0.240,)$$

となり (すなわち，$(-0.383,\ 1.683)$)，信頼係数 0.95 の α の信頼区間は，

$$(0.3 - 4.303 \times 3.163,\ 0.3 + 4.303 \times 3.163,)$$

となる (すなわち，(−13.31, 13.91))。

同様にして，信頼係数 0.90 の β の信頼区間は，

$$(0.65 - 2.920 \times 0.240,\ 0.65 + 2.920 \times 0.240,)$$

となり (すなわち，(−0.051, 1.051))，信頼係数 0.95 の α の信頼区間は，

$$(0.3 - 2.920 \times 3.163,\ 0.3 + 2.920 \times 3.163,)$$

となる (すなわち，(−8.94, 9.24))。

4.7　α，β の仮説検定

4.7.1　統計学の復習：仮説検定

$\overline{X}$ の分布を利用して，μ の仮説検定を行う。

1. 帰無仮説 H_0：$\mu = \mu_0$
   対立仮説 H_1：$\mu \neq \mu_0$