2. 帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ が正しいもとでの分布は，

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

となる。

3. $\mathrm{Prob}\left(t_{1-\alpha/2}(n-1) < \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$

   $t_{\alpha/2}(n-1)$，$t_{1-\alpha/2}(n-1)$ をそれぞれ自由度 $n-1$ の t 分布の上から $100 \times \dfrac{\alpha}{2}$ % 点，$100 \times \dfrac{1-\alpha}{2}$ % 点の値とする。

   自由度と α が決まれば，$t_{\alpha/2}(n-1)$，$t_{1-\alpha/2}(n-1)$ は t 分布表から得られる。

4. α を有意水準と呼ぶ。慣習的に $\alpha = 0.01, 0.05$ が使われる。

5. $-t_{\alpha/2}(n-1) > \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$，または，

$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2}(n-1)$ ならば，帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ は，分布の端にあり，起こりにくいと考える。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。

6. 実際の検定手続：

(a) $\overline{X}, S^2$ を実績値で置き換えて，

$$\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

を得る。

ただし，$\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$， $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ とする。

(b) $-t_{\alpha/2}(n-1) > \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$， または，

$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2}(n-1)$ ならば，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。

4.7.2　α，$\boldsymbol{\beta}$ の仮説検定

「帰無仮説： $H_0 : \beta = \beta_0$，対立仮説： $H_1 : \beta \neq \beta_0$」の検定を行う。

帰無仮説： $H_0 : \beta = \beta_0$ が正しいとするもとでは,

$$\frac{\widehat{\beta} - \beta_0}{s_{\widehat{\beta}}} = \frac{\widehat{\beta} - \beta_0}{s / \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}} \sim t(n-2),$$

の分布に従う。

よって，検定の手順は,

1. 検定統計値

$$\frac{\widehat{\beta} - \beta_0}{s / \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}}$$

を計算する。

ただし,

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} X_i)^2,$$

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2},$$
$$\widehat{\alpha} = \overline{Y} - \widehat{\beta\overline{X}},$$

とする。

2. 有意水準 α を決めて (この α は，回帰式の定数項の α とは異なることに注意)，t 分布表から $100 \times \alpha$ % 点の値を求める。通常，$\alpha = 0.01, 0.05$ とする。

3. t 分布表から得られた $100 \times \alpha$ % 点の値と検定統計値の大小を比較する。すなわち,
$$-t_{\alpha/2}(n-2) > \frac{\widehat{\beta} - \beta_0}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}},$$
または,
$$\frac{\widehat{\beta} - \beta_0}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}} > t_{\alpha/2}(n-2)$$
ならば，有意水準 α で帰無仮説 H_0：$\beta = \beta_0$ を棄却する。

帰無仮説 H_0：$\beta = \beta_0$ を中心とした分布を考えるとき，データから得られた検定統計量は，分布の端にあり，確率的に起こりにくいと考える。

となる。

定数項の推定量 $\widehat{\alpha}$ についても同様。

4.7.3　t 値について

特に,「帰無仮説： $H_0 : \beta = 0$，対立仮説： $H_1 : \beta \neq 0$」の検定は特別の意味を持つ。

帰無仮説のもとでは,

$$\frac{\widehat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}} \sim t(n-2)$$

の分布に従う。

このときの t 統計量の値 (すなわち，$\dfrac{\widehat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}}$) を t 値と呼ぶ。

回帰式

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

において，帰無仮説 $H_0 : \beta = 0$ は,「X_i が Y_i に何の影響も与えない」ということを意味する。

有意水準 α のもとで (この α は，回帰式の定数項の α とは異なることに注意),

$$-t_{\alpha/2}(n-2) > \frac{\widehat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}},$$

または,

$$\frac{\widehat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}} > t_{\alpha/2}(n-2)$$

ならば，有意水準 α で帰無仮説 $H_0 :\ \beta = 0$ を棄却する。

1. 回帰モデル

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

において，経済理論から $\beta > 0$ という符号条件が想定されたとする。

2. 有意水準 α を決める。(例えば，$\alpha = 0.05, 0.01$)

3. 実際のデータから，$\widehat{\beta} > 0$ が得られた場合

(a) t 値が,

$$\frac{\widehat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} > t_{\alpha/2}(n-2)$$

となった場合，帰無仮説 H_0：$\beta=0$ が棄却され，$\beta>0$ が統計的にも証明され，経済理論は現実経済をサポートする結果。

(b) t 値が,

$$\frac{\widehat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} < t_{\alpha/2}(n-2)$$

となった場合，帰無仮説 H_0：$\beta=0$ を棄却できず，$\widehat{\beta}>0$ にもかかわらず，$\beta<0$ の可能性もあるため，経済理論が現実経済を積極的には支持しない。

4. 実際のデータから，$\widehat{\beta}<0$ が得られた場合

(a) t 値が,

$$-t_{\alpha/2}(n-2) < \frac{\widehat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}},$$

となった場合，帰無仮説 H_0 : $\beta = 0$ を棄却できず，$\widehat{\beta} < 0$ にもかかわらず，$\beta > 0$ の可能性もあるため，得られた推定結果と経済理論は完全に矛盾しているとは言えない。

(b) t 値が，

$$-t_{\alpha/2}(n-2) > \frac{\widehat{\beta}}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}},$$

となった場合，帰無仮説 H_0 : $\beta = 0$ は棄却され，統計的には $\beta < 0$ となり，得られた推定結果と経済理論は完全に矛盾している。すなわち，この場合，経済理論の立て直しが必要。

数値例： 今までと同様に，以下の数値例をとりあげる。

i	Y_i	X_i
1	6	10
2	9	12
3	10	14
4	10	16

回帰モデル $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ を推定した結果，以下の推定値を得た。

$$\widehat{\beta} = 0.65,$$
$$s_{\widehat{\beta}} = \sqrt{0.0575} = 0.240,$$

帰無仮説 H_0： $\beta = 0$，対立仮説 H_0： $\beta \neq 0$ の検定を行う。t 値は $0.65/0.240 = 2.711$，有意水準 5 % の $t_{\alpha/2}(n-2)$ の値は 4.303 となり ($\alpha = 0.5, n = 4$),

$$\frac{\widehat{\beta}}{s_{\widehat{\beta}}} = \frac{0.65}{\sqrt{0.0575}} = 2.708 < t_{\alpha/2}(n-2) = 4.303$$

を得る。このように，有意水準 5 % で帰無仮説 H_0： $\beta = 0$ は棄却されない。よって，β の符号は統計学的に確定できない。

また，α についても同様に，t 値を計算できる。

$$\widehat{\alpha} = 0.3,$$
$$s_{\widehat{\alpha}} = \sqrt{10.005} = 3.163,$$

なので，t 値は,

$$\frac{\widehat{\alpha}}{s_{\widehat{\alpha}}} = \frac{0.3}{\sqrt{10.005}} = 0.095 < t_{\alpha/2}(n-2) = 4.303,$$

となり，有意水準 5 % で H_0：$\alpha = 0$ を棄却できない。

しかし，定数項については，経済学的意味が無い場合が多い。

推定結果の表記方法： 回帰モデル：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

の推定の結果，$\widehat{\alpha} = 0.3, \widehat{\beta} = 0.65$, $s_{\widehat{\alpha}} = \sqrt{10.0005} = 3.163$, $s_{\widehat{\beta}} = \sqrt{0.0575} = 0.240$, $\dfrac{\widehat{\alpha}}{s_{\widehat{\alpha}}} = 0.095$, $\dfrac{\widehat{\beta}}{s_{\widehat{\beta}}} = 2.708$, $s^2 = 1.15$ (すなわち，$s = 1.07$), $R^2 = 0.786$ を得た。これらをまとめて，

$$Y_i = \underset{(0.095)}{0.3} + \underset{(2.708)}{0.65}\ X_i,$$

$$R^2 = 0.786, \quad s = 1.07,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。

または,

$$Y_i = \underset{(3.163)}{0.3} + \underset{(0.240)}{0.65}\ X_i,$$

$$R^2 = 0.786, \quad s = 1.07,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は標準誤差を
表すものとする。

のように書く。

5　多重回帰

n 組のデータ $(Y_i, X_{1i}, X_{2i}, \cdots, X_{ki})$, $i = 1, 2, \cdots, n$ を用いて，k 変数の多重回帰モデルを考える。

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

ただし，X_{ji} は j 番目の説明変数の第 i 番目の観測値を表す。u_i は誤差項 (または，攪乱項) で，同じ仮定を用いる (すなわち，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は互いに独立に，平均ゼロ，分散 σ^2 の正規分布に従う)。

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ は推定されるべきパラメータである。

すべての i について，$X_{1i} = 1$ とすれば，β_1 は定数項として表される。

次のような関数 $S(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$ を定義する。

$$S(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i} - \cdots - \beta_k X_{ki})^2$$

このとき,

$$\min_{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k} S(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)$$

となるような $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ を求める。$\Longrightarrow$ 最小自乗法

このときの解を $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \cdots, \widehat{\beta}_k$ とする。

最小化のためには,

$$\frac{\partial S(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)}{\partial \beta_1} = 0$$

$$\frac{\partial S(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)}{\partial \beta_2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial S(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)}{\partial \beta_k} = 0$$

を満たす $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ が $\widehat{\beta}_1,\widehat{\beta}_2,\cdots,\widehat{\beta}_k$ となる。

すなわち，$\widehat{\beta}_1,\widehat{\beta}_2,\cdots,\widehat{\beta}_k$ は,

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{\beta}_1X_{1i}-\widehat{\beta}_2X_{2i}-\cdots-\widehat{\beta}_kX_{ki})X_{1i}=0,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{\beta}_1X_{1i}-\widehat{\beta}_2X_{2i}-\cdots-\widehat{\beta}_kX_{ki})X_{2i}=0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{\beta}_1X_{1i}-\widehat{\beta}_2X_{2i}-\cdots-\widehat{\beta}_kX_{ki})X_{ki}=0,$$

を満たす。

さらに,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_i=\widehat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}X_{1i}^2+\widehat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}+\cdots\\ +\widehat{\beta}_k\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{ki},\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{2i}Y_i = \widehat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} + \widehat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 + \cdots + \widehat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{ki},$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ki}Y_i = \widehat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{ki} + \widehat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{ki} + \cdots + \widehat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2,$$

行列表示によって，

$$
\begin{pmatrix} \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \\ \vdots \\ \sum X_{ki}Y_i \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix} \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum X_{1i}X_{ki} \\ \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \cdots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{1i}X_{ki} & \sum X_{2i}X_{ki} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\beta}_k \end{pmatrix},
$$

が得られ，$\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \cdots, \widehat{\beta}_k$ についてまとめると，

$$
\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\beta}_k \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix} \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum X_{1i}X_{ki} \\ \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \cdots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{1i}X_{ki} & \sum X_{2i}X_{ki} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{pmatrix}^{-1}
$$

5.1　重回帰モデルにおける回帰係数の意味

結論：　他の変数の影響を取り除いての被説明変数への影響を表す。

$k=2$ の単純なモデル：

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

β_1, β_2 の最小二乗推定量は,

$$\min_{\beta_1,\beta_2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i})^2$$

を解いて，$\widehat{\beta}_1$，$\widehat{\beta}_2$ が次のように得られる。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_i X_{1i}^2 & \sum_i X_{1i}X_{2i} \\ \sum_i X_{1i}X_{2i} & \sum_i X_{2i}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_i X_{1i}Y_i \\ \sum_i X_{2i}Y_i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(\sum_i X_{1i}^2)(\sum_i X_{2i}^2) - (\sum_i X_{1i}X_{2i})^2} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \sum_i X_{2i}^2 & -\sum_i X_{1i}X_{2i} \\ -\sum_i X_{1i}X_{2i} & \sum_i X_{1i}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_i X_{1i}Y \\ \sum_i X_{2i}Y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
= \begin{pmatrix} \dfrac{(\sum_i X_{2i}^2)(\sum_i X_{1i}Y_i) - (\sum_i X_{1i}X_{2i})(\sum_i X_{2i}Y_i)}{(\sum_i X_{1i}^2)(\sum_i X_{2i}^2) - (\sum_i X_{1i}X_{2i})^2} \\ \dfrac{-(\sum_i X_{1i}X_{2i})(\sum_i X_{1i}Y_i) + (\sum_i X_{1i}^2)(\sum_i X_{2i}Y_i)}{(\sum_i X_{1i}^2)(\sum_i X_{2i}^2) - (\sum_i X_{1i}X_{2i})^2} \end{pmatrix}
$$

$\sum_{i=1}^n X_{ji}X_{li}$，$\sum_{i=1}^n X_{ji}Y_i$ を $\sum_i X_{ji}X_{li}$，$\sum_i X_{ji}Y_i$ と表記する。
ただし，$j = 1, 2$，$l = 1, 2$ とする。

一方，次の 2 つの回帰式を考える。

$$
Y_i = \alpha_1 X_{2i} + v_i
$$
$$
X_{1i} = \alpha_2 X_{2i} + w_i
$$

α_1，α_2 のそれぞれの最小二乗推定量を求めると，

$$
\widehat{\alpha}_1 = \frac{\sum_i X_{2i}Y_i}{\sum_i X_{2i}^2}, \qquad \widehat{\alpha}_2 = \frac{\sum_i X_{2i}X_{1i}}{\sum_i X_{2i}^2}
$$

となる。

$\widehat{\alpha}_1$，$\widehat{\alpha}_2$ を用いて，残差 $\widehat{v}_i$，$\widehat{w}_i$ を下記のようにそれぞれ求める。

$$
\widehat{v}_i = Y_i - \widehat{\alpha}_1 X_{2i}, \qquad \widehat{w}_i = X_{1i} - \widehat{\alpha}_2 X_{2i}
$$

$\widehat{v}_i$，$\widehat{w}_i$ は Y_i，X_{1i} から X_{2i} の影響を取り除いたものと解釈できる。

更に，次の回帰式を考える。

$$\widehat{v}_i = \gamma \widehat{w}_i + \epsilon_i$$

γ の最小二乗推定量 $\widehat{\gamma}$ は $\widehat{\beta}_1$ に一致することを示す。

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma} &= \frac{\sum_i \widehat{w}_i \widehat{v}_i}{\sum_i \widehat{w}_i^2} \\
&= \frac{\sum_i (X_{1i} - \widehat{\alpha}_2 X_{2i})(Y_i - \widehat{\alpha}_1 X_{2i})}{\sum_i (X_{1i} - \widehat{\alpha}_2 X_{2i})^2} \\
&= \frac{\sum_i X_{1i} Y_i - \widehat{\alpha}_1 \sum_i X_{1i} X_{2i} - \widehat{\alpha}_2 \sum_i X_{2i} Y_i + \widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_2 \sum_i X_{2i}^2}{\sum_i X_{1i}^2 - 2\widehat{\alpha}_2 \sum_i X_{1i} X_{2i} + \widehat{\alpha}_2^2 \sum_i X_{2i}^2} \\
&= \frac{\sum_i X_{1i} Y_i - \dfrac{(\sum_i X_{2i} Y_i)(\sum_i X_{1i} X_{2i})}{\sum_i X_{2i}^2}}{\sum_i X_{1i}^2 - \dfrac{(\sum_i X_{1i} X_{2i})^2}{\sum_i X_{2i}^2}} \\
&= \frac{(\sum_i X_{2i}^2)(\sum_i X_{1i} Y_i) - (\sum_i X_{1i} X_{2i})(\sum_i X_{2i} Y_i)}{(\sum_i X_{1i}^2)(\sum_i X_{2i}^2) - (\sum_i X_{1i} X_{2i})^2}
\end{aligned}$$

$$= \widehat{\beta}_1,$$

「Y_i から X_{2i} の影響を取り除いた変数」を被説明変数,「X_{1i} から X_{2i} の影響を取り除いた変数」を説明変数とした回帰係数が β_1 に等しい。

一般化： 次の回帰モデルを考える。

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

j 番目の回帰係数 β_j の意味は,「Y_i から $X_{1i}, \cdots, X_{j-1,i}, X_{j+1,i}, \cdots, X_{ki}$ (すなわち，X_{ji} 以外の説明変数) の影響を取り除いた変数」を被説明変数,「X_{ji} から $X_{1i}, \cdots, X_{j-1,i}, X_{j+1,i}, \cdots, X_{ki}$ (すなわち，X_{ji} 以外の説明変数) の影響を取り除いた変数」を説明変数とした回帰係数となる。

5.2　推定量の性質

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ の最小二乗推定量は $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \cdots, \widehat{\beta}_k$ とする。

誤差項 (または，攪乱項) u_i の分散 σ^2 の推定量 s^2 は,

$$s^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2$$