6　関数型について

線型：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

この場合,

$$\beta = \frac{\mathrm{d}Y_i}{\mathrm{d}X_i}$$

なので，β は，X_i が一単位上昇 (下落) したとき，Y_i は何単位上昇 (下落) するのかを表す。すなわち，β は限界係数と呼ばれる。

成長率：

$$100 \times \frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}} = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

として，成長率を被説明変数として用いる場合もある。$100 \times \dfrac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}}$ という変数をあらかじめ作っておき，これをこれまでの Y_i として扱う。

注意：

$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ と $100 \times \dfrac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}} = \alpha + \beta X_i + u_i$ では，得られる決定係数の大きさが全く異なる。単純に，R^2 や $\overline{R}^2$ による比較はこの場合出来ない。

$\Longrightarrow s^2$ で比較すればよい。

対数線型：

$$\log(Y_i) = \alpha + \beta \log(X_i) + u_i,$$

この場合,

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\log(Y_i)}{\mathrm{d}\log(X_i)} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}Y_i}{Y_i}}{\dfrac{\mathrm{d}X_i}{X_i}} = \frac{100\dfrac{\mathrm{d}Y_i}{Y_i}}{100\dfrac{\mathrm{d}X_i}{X_i}}$$

となる。

2 つ目の等号では，$\dfrac{\mathrm{d}\log(Y_i)}{\mathrm{d}Y_i} = \dfrac{1}{Y_i}$ が利用される。

3 つ目の等号の分子 $100\dfrac{\mathrm{d}Y_i}{Y_i}$ や分母 $100\dfrac{\mathrm{d}X_i}{X_i}$ は上昇率を表す。

したがって，β は，X_i が 1%上昇 (下落) したとき，Y_i は何%上昇 (下落) するのかを表す。β は弾力性と呼ばれる。

例：コブ＝ダグラス型生産関数：

$$Q_i = \beta_1 K_i^{\beta_2} L_i^{\beta_3}$$

ただし，Q_i は生産量，K_i は資本，L_i は労働である。この場合，対数変換によって，

$$\log(Q_i) = \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + \beta_3 \log(L_i) + u_i,$$

として，$\log(Q_i), \log(K_i), \log(L_i)$ のデータをあらかじめ変換しておき，最小二乗法で $\beta_1', \beta_2, \beta_3$ を推定する。また，生産関数には一次同次の制約 $\beta_2 + \beta_3 = 1$ を置く場合が多い。この場合は，

$$\begin{aligned}\log(Q_i) &= \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + \beta_3 \log(L_i) \\ &= \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + (1 - \beta_2) \log(L_i) + u_i \\ &= \beta_1' + \beta_2(\log(K_i) - \log(L_i)) + \log(L_i) + u_i,\end{aligned}$$

となるので，

$$\log(Q_i) - \log(L_i) = \beta_1' + \beta_2(\log(K_i) - \log(L_i)) + u_i,$$

を最小二乗法で推定し，β_1', β_2 を求めることになる。この場合も同様に，各変数をあらかじめ，$\log(Q_i) - \log(L_i)$，$\log(K_i) - \log(L_i)$ としてデータを作っておく必要がある。

二次式：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma X_i^2 + u_i,$$

$\Longrightarrow$ 平均費用と生産量との関係等

逆数：

$$Y_i = \alpha + \beta \frac{1}{X_i} + u_i,$$

$\Longrightarrow$ 賃金上昇率と失業率との関係 (フィリップス曲線)

遅れのある変数：　習慣的効果を考慮に入れたモデル：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma Y_{i-1} + u_i,$$

ラグ付き内生変数が説明変数に用いられる。

X_i の Y_i への効果は，短期効果，長期効果の 2 つある。β は短期効果を表す係数である。長期効果とは，$Y_i = Y_{i-1}$ となるときの，X_i から Y_i への影響を示す効果である。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma Y_i + u_i,$$

として，Y_i について解くと，

$$Y_i = \frac{\alpha}{1-\gamma} + \frac{\beta}{1-\gamma}X_i + \frac{1}{1-\gamma}u_i,$$

となり，$\dfrac{\beta}{1-\gamma}$ が X_i の Y_i への長期効果を表す係数となる。

問題点：

1. 最小二乗法の仮定の一つに，説明変数は確率変数ではないという仮定がある。ラグ付き内生変数を説明変数に加えることによって，この仮定が満たされなくなる。最小二乗推定量は最小分散線型不偏推定量ではなくなる。

2. Y_i と X_i とは，経済理論的に考えると，相関が高いはず。Y_i と Y_{i-1} は相関が高い。当然，Y_{i-1} と X_i も高い相関を示す。

   $\Longrightarrow$ 多重共線性の可能性が高い。

3. DW 統計量は意味をなさない。(DW については，後述)

遅れのある変数の解釈 (部分調整モデル)： X_i が与えられたときの Y の最適水準を Y_i^* とする。

$$Y_i^* = \alpha + \beta X_i,$$

現実の水準 Y_i は，最適水準 Y_i^* と前期の水準 Y_{i-1} との差の一定割合と前期の水準 Y_{i-1} との和で与えられるとする。調整関数を考える。

$$Y_i - Y_{i-1} = \lambda(Y_i^* - Y_{i-1}) + u_i,$$

ただし，u_i は互いに独立で同一な分布の誤差項，$0 < \lambda < 1$ とする。

よって，

$$Y_i = \lambda\alpha + \lambda\beta X_i + (1-\lambda)Y_{i-1} + u_i,$$

を得る。

Y_{i-1} と u_i との相関はない。

しかし，Y_{i-1} が説明変数の一つに入っている (説明変数間が確率変数でないという仮定に反する)。

推定量は不偏推定量ではないが，一致推定量である (証明略)。

7　系列相関：*DW* について

7.1　*DW* について

最小自乗法の仮定の一つに,「攪乱項 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ はそれぞれ独立に分布する」というものがあった。ダービン・ワトソン比 (*DW*) とは，誤差項の系列相関，す

なわち，u_i と u_{i-1} との間の相関の有無を検定するために考案された。

$\Longrightarrow$ 時系列データのときのみ有効

$u_1, u_2, \cdots, u_n$ の系列について，それぞれの符号が，+ + + - - - - + + - - - + + のように，プラスが連続で続いた後で，マイナスが連続で続くというような場合，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は正の系列相関があると言う。また，+ - + - + - + - + のように交互にプラス，マイナスになる場合，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 負の系列相関があると言う。

特徴：$u_1, u_2, \cdots, u_i$ から u_{i+1} の符号が予想できる。$\Longrightarrow$「$u_1, u_2, \cdots, u_n$ はそれぞれ独立に分布する」という仮定に反する。

すなわち，ダービン・ワトソン比とは，回帰式が

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \alpha + \beta X_i + u_i, \\
u_i &= \rho u_{i-1} + \epsilon_i,
\end{aligned}
$$

のときに，H_0：$\rho = 0, H_1$：$\rho \neq 0$ の検定である。ただし，$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。

ダービン・ワトソン比の定義は次の通りである。

$$
DW = \frac{\sum_{i=2}^{n}(\widehat{u_i} - \widehat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2}
$$

DW は近似的に，次のように表される。

$$\begin{aligned}
DW &= \frac{\sum_{i=2}^{n}(\widehat{u}_i - \widehat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2} \\
&= \frac{\sum_{i=2}^{n}\widehat{u}_i^2 - 2\sum_{i=2}^{n}\widehat{u}_i\widehat{u}_{i-1} + \sum_{i=2}^{n}\widehat{u}_{i-1}^2}{\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2} \\
&= \frac{2\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2 - (\widehat{u}_1^2 + \widehat{u}_n^2)}{\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2} - 2\frac{\sum_{i=2}^{n}\widehat{u}_i\widehat{u}_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2} \\
&\approx 2(1-\widehat{\rho}),
\end{aligned}$$

以下の 2 つの近似が用いられる。

$$\frac{\widehat{u}_1^2 + \widehat{u}_n^2}{\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2} \approx 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=2}^{n}\widehat{u}_i\widehat{u}_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2} &= \frac{\sum_{i=2}^{n}\widehat{u}_i\widehat{u}_{i-1}}{\sum_{i=2}^{n}\widehat{u}_{i-1}^2 + \widehat{u}_n^2} \\
&\approx \frac{\sum_{i=2}^{n}\widehat{u}_i\widehat{u}_{i-1}}{\sum_{i=2}^{n}\widehat{u}_{i-1}^2} \\
&= \widehat{\rho},
\end{aligned}$$

すなわち，$\widehat{\rho}$ は $\widehat{u}_i$ と $\widehat{u}_{i-1}$ の回帰係数である。$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i$ において，u_i, u_{i-1} の代わりに $\widehat{u}_i, \widehat{u}_{i-1}$ に置き換えて，ρ の推定値 $\widehat{\rho}$ を求める。

1. DW の値が 2 前後のとき，系列相関なし ($\widehat{\rho} = 0$ のとき，$DW \approx 2$)。

2. DW が 2 より十分に小さいとき，正の系列相関と判定される。

3. DW が 2 より十分に大きいとき，負の系列相関と判定される。

正確な判定には，データ数 n とパラメータ数 k に依存する。表 1 と表 2 を参照せよ。

表 1 と表 2 で，k' は定数項を除くパラメータ数を表すものとする。

数値例： 今までと同じ数値例で，DW を計算する。

i	Y_i	X_i	X_iY_i	X_i^2	$\widehat{Y}_i$	$\widehat{u}_i$
1	6	10	60	100	6.8	−0.8
2	9	12	108	144	8.1	0.9
3	10	14	140	196	9.4	0.6
4	10	16	160	256	10.7	−0.7
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum X_iY_i$	$\sum X_i^2$	$\sum \widehat{Y}_i$	$\sum \widehat{u}_i$
	35	52	468	696	35	0
平均	$\overline{Y}$	$\overline{X}$				
	8.75	13				

$$
\begin{aligned}
DW &= \frac{\sum_{i=2}^{n}(\widehat{u}_i - \widehat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2} \\
&= \frac{(-0.8 - 0.9)^2 + (0.9 - 0.6)^2 + (0.6 - (-0.7))^2}{(-0.8)^2 + 0.9^2 + 0.6^2 + (-0.7)^2} \\
&= \frac{4.67}{2.30} = 2.03
\end{aligned}
$$

推定結果の表記方法：　回帰モデル：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

の推定の結果，$\widehat{\alpha} = 0.3, \widehat{\beta} = 0.65$, $s_{\widehat{\alpha}} = \sqrt{10.0005} = 3.163$, $s_{\widehat{\beta}} = \sqrt{0.0575} = 0.240$, $\dfrac{\widehat{\alpha}}{s_{\widehat{\alpha}}} = 0.095$, $\dfrac{\widehat{\beta}}{s_{\widehat{\beta}}} = 2.708$, $s^2 = 1.15$ (すなわち，$s = 1.07$), $R^2 = 0.786$, $\overline{R}^2 = 0.679$, $DW = 2.03$ を得た。これらをまとめて,

$$
\begin{aligned}
Y_i = \underset{(0.095)}{0.3} + \underset{(2.708)}{0.65}\,X_i, \\
R^2 = 0.786, \quad \overline{R}^2 = 0.679, \\
s = 1.07, \quad DW = 2.03,
\end{aligned}
$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。

または,

$$
\begin{aligned}
Y_i = \underset{(3.163)}{0.3} + \underset{(0.240)}{0.65}\,X_i, \\
R^2 = 0.786, \quad \overline{R}^2 = 0.679, \\
s = 1.07, \quad DW = 2.03,
\end{aligned}
$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は標準誤差を表すものとする。

のように書く。$s = \sqrt{1.15} = 1.07$ に注意。

図 4： 正の系列相関

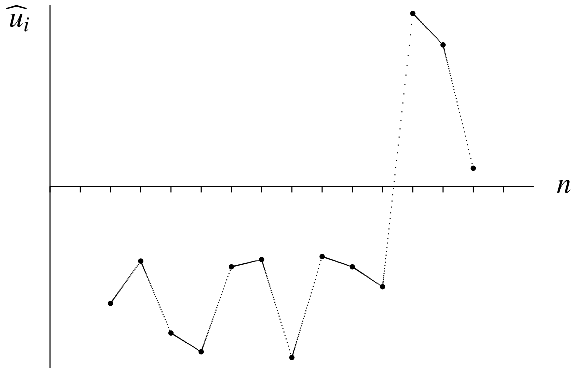

図 5： 負の系列相関

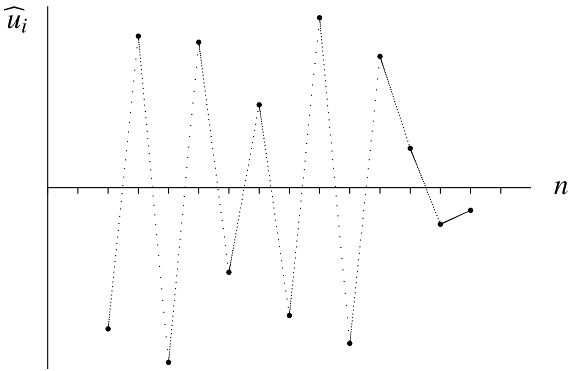

Table 1: ダービン・ワトソン統計量の 5 % 点の上限と下限

(1) $k' = 1$

	A		B		C		D		E	
n	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	0	1.08	1.08	1.36	1.36	2.64	2.64	2.92	2.92	4
20	0	1.20	1.20	1.41	1.41	2.59	2.59	2.80	2.80	4
25	0	1.29	1.29	1.45	1.45	2.55	2.55	2.71	2.71	4
30	0	1.35	1.35	1.49	1.49	2.51	2.51	2.65	2.65	4

(2) $k' = 2$

	A		B		C		D		E	
n	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	0	0.95	0.95	1.54	1.54	2.46	2.46	3.05	3.05	4
20	0	1.10	1.10	1.54	1.54	2.46	2.46	2.90	2.90	4
25	0	1.21	1.21	1.55	1.55	2.45	2.45	2.79	2.79	4
30	0	1.28	1.28	1.57	1.57	2.43	2.43	2.72	2.72	4

(3) $k' = 3$

	A		B		C		D		E	
n	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限

Table 2: ダービン・ワトソン統計量の 5 % 点の上限と下限

	$k'=1$		$k'=2$		$k'=3$		$k'=4$		$k'=5$		$k'=6$		$k'=7$		$k'=8$		$k'=9$		$k'=10$		k'
n	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl
6	0.610	1.400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0.700	1.356	0.467	1.896	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.367	2.287	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	0.927	1.324	0.758	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.315	2.645	0.203	3.004	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.380	2.506	0.268	2.832	0.171	3.149	—	—	—	—	—	—	—
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.444	2.390	0.328	2.692	0.230	2.985	0.147	3.266	—	—	—	—	—
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296	0.389	2.572	0.286	2.848	0.200	3.111	0.127	3.360	—	—	—
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220	0.447	2.471	0.343	2.727	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438	—
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157	0.502	2.388	0.398	2.624	0.304	2.860	0.222	3.090	0.155	3.304	0.09
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104	0.554	2.318	0.451	2.537	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184	0.13
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060	0.603	2.257	0.502	2.461	0.407	2.668	0.321	2.873	0.244	3.073	0.17
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023	0.649	2.206	0.549	2.396	0.456	2.589	0.369	2.783	0.290	2.974	0.22
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991	0.691	2.162	0.595	2.339	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885	0.26
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964	0.731	2.124	0.637	2.290	0.546	2.461	0.461	2.633	0.380	2.806	0.30
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940	0.769	2.090	0.677	2.246	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.735	0.34
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920	0.804	2.061	0.715	2.208	0.628	2.360	0.545	2.514	0.465	2.670	0.39
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902	0.837	2.035	0.750	2.174	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613	0.43
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886	0.868	2.013	0.784	2.144	0.702	2.280	0.621	2.419	0.544	2.560	0.47
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873	0.897	1.992	0.816	2.117	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513	0.50
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861	0.925	1.974	0.845	2.093	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.470	0.54
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850	0.951	1.959	0.874	2.071	0.798	2.188	0.723	2.309	0.649	2.431	0.57
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841	0.975	1.944	0.900	2.052	0.826	2.164	0.753	2.278	0.681	2.396	0.61
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833	0.998	1.931	0.926	2.034	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363	0.64
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825	1.020	1.920	0.950	2.018	0.879	2.120	0.810	2.226	0.741	2.333	0.67
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819	1.041	1.909	0.972	2.004	0.904	2.102	0.836	2.203	0.769	2.306	0.70
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813	1.061	1.900	0.994	1.991	0.927	2.085	0.861	2.181	0.796	2.281	0.73
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808	1.079	1.891	1.015	1.978	0.950	2.069	0.885	2.162	0.821	2.257	0.75
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803	1.097	1.884	1.034	1.967	0.971	2.054	0.908	2.144	0.845	2.236	0.78
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799	1.114	1.876	1.053	1.957	0.991	2.041	0.930	2.127	0.868	2.216	0.80
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795	1.131	1.870	1.071	1.948	1.011	2.029	0.951	2.112	0.891	2.197	0.83
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792	1.146	1.864	1.088	1.939	1.029	2.017	0.970	2.098	0.912	2.180	0.85
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789	1.161	1.859	1.104	1.932	1.047	2.007	0.990	2.085	0.932	2.164	0.87
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786	1.175	1.854	1.120	1.924	1.064	1.997	1.008	2.072	0.952	2.150	0.89
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776	1.238	1.835	1.189	1.895	1.139	1.958	1.089	2.022	1.038	2.088	0.98
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771	1.291	1.822	1.246	1.875	1.201	1.930	1.156	1.986	1.110	2.044	1.06
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768	1.334	1.814	1.294	1.861	1.253	1.909	1.212	1.959	1.170	2.010	1.12