

となる。

10.3 検定の方法

多重回帰モデル

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

において、パラメータ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ に何らかの制約が妥当かどうかを検定する。

制約の数を G 個とする。

全く制約の無い場合に得られた残差を \widehat{u}_i とする。

制約を含めて推定されたときの残差を \bar{u}_i とする。

すなわち、

帰無仮説 $H_0 : \beta_{k-G+1} = \cdots = \beta_k = 0,$

対立仮説 $H_1 : H_0$ でない。

を検定する場合、

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_{k-G} X_{k-G,i} \\ &\quad + \beta_{k-G+1} X_{k-G+1,i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i, \end{aligned}$$

の推定によって得られた残差を \widehat{u}_i (制約なし残差) とおき,

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_{k-G} X_{k-G,i} + u_i,$$

の推定によって得られた残差を \widetilde{u}_i (制約付き残差) とする。

1. H_0 が真のとき, $\frac{\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \widehat{u}_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(G)$ となる。(証明略)
2. また, $\frac{\sum \widehat{u}_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$ となる。(証明略)
3. さらに, $\frac{\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \widehat{u}_i^2}{\sigma^2}$ と $\frac{\sum \widehat{u}_i^2}{\sigma^2}$ とは独立に分布する。(証明略)
4. したがって, この場合,

$$\frac{(\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \widehat{u}_i^2)/G}{\sum \widehat{u}_i^2/(n-k)} \sim F(G, n-k),$$

となる。(証明略)

例 1：コブ＝ダグラス型生産関数：

制約なしの場合：

$$\log(Q_i) = \beta'_1 + \beta_2 \log(K_i) + \beta_3 \log(L_i) + u_i,$$

$\beta_2 + \beta_3 = 1$ の制約ありの場合：

$$\log\left(\frac{Q_i}{L_i}\right) = \beta'_1 + \beta_2 \log\left(\frac{K_i}{L_i}\right) + u_i,$$

例 2：構造変化の検定：

制約なしの場合：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma D_i + \delta D_i X_i + u_i,$$

$\gamma = \delta = 0$ の制約ありの場合：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

例 3：多重回帰モデルの係数の同時検定：

制約なしの場合：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma Z_i + u_i,$$

$\beta = \gamma = 0$ の制約ありの場合：

$$Y_i = \alpha + u_i,$$

11 応用例

11.1 マクロの消費関数

1. 所得から税金を差し引いたものを可処分所得と呼ぶが、可処分所得 (Y) が増えれば消費 (C) も増える。
2. この関数を $C = \alpha + \beta Y$ という線形 (一次式) によって表されると仮定しよう。
3. この場合、経済学では、 α は基礎消費、 β は限界消費性向と呼ばれる。
4. α で表される基礎消費とは所得がなくても日常生活に最低限必要な消費 (すなわち、衣食住宅費等) であり、 β の限界消費性向とは所得が 1 円増えれば消費はいくら増えるのかという指標である。

5. α, β はパラメータと呼ばれ、未知である。
6. C や Y は『国民経済計算年報』(経済企画庁編)から「国内家計最終消費支出」「家計国民可処分所得」という項目で、それぞれデータは公表される。
7. ここでは、平成10年版の『国民経済計算年報』のデータを扱う。
 1. 『国民経済計算年報』から「国内家計最終消費支出」と「家計国民可処分所得」の1970年～1996年の年次データ(時系列データの種類は年次データ、四半期データ、月次データ等がある)を取ってくる。
 2. 計量分析で重要なことは、名目値でなく実質値をとることである。
 3. 実質値とはある基準となる年を定めて、その年の物価で生のデータ(名目値)を変換するということである。
 4. 実質値 = $\frac{\text{名目値}}{\text{物価指数}}$ という関係が成り立つ。(ここでの「物価指数」は基準年次を1とした場合のもので、もし基準年次が100ならば、実質値 = $\frac{\text{名目値}}{\text{物価指数}/100}$ とする必要がある。)

Table 3: 所得と消費のデータ

暦年	国内家計 最終支出	家計可処分 所得	国内家計 最終支出 デレータ
1970	37784.1	45913.2	35.2
1971	42571.6	51944.3	37.5
1972	49124.1	60245.4	39.7
1973	59366.1	74924.8	44.1
1974	71782.1	93833.2	53.3
1975	83591.1	108712.8	59.4
1976	94443.7	123540.9	65.2
1977	105397.8	135318.4	70.1
1978	115960.3	147244.2	73.5
1979	127600.9	157071.1	76.0
1980	138585.0	169931.5	81.6
1981	147103.4	181349.2	85.4
1982	157994.0	190611.5	87.7
1983	166631.6	199587.8	89.5
1984	175383.4	209451.9	91.8
1985	185335.1	220655.6	93.9
1986	193069.6	229938.8	94.8
1987	202072.8	235924.0	95.3

5. 異なる時点間でデータを比較する場合、それぞれの時点で物価が異なるので、物価の変動を取り除いたデータで比較する必要がある。
6. ここで用いられる国内家計最終消費支出 C_i と家計国民可処分所得 Y_i のデータは名目データであり、実質データに変換する必要がある。
7. 1990 年の「国内家計最終消費支出デフレーター」は 100 なので、基準年次は 1990 年となる。
8. 1990 年の貨幣価値に変換することを、1990 年価格で実質化するという。

まず最初に、

$$C_i = \alpha + \beta Y_i + u_i, \quad u_i \sim N(0, \sigma^2),$$

の推定を行う。ただし、 u_i は互いに独立に正規分布するものと仮定する。

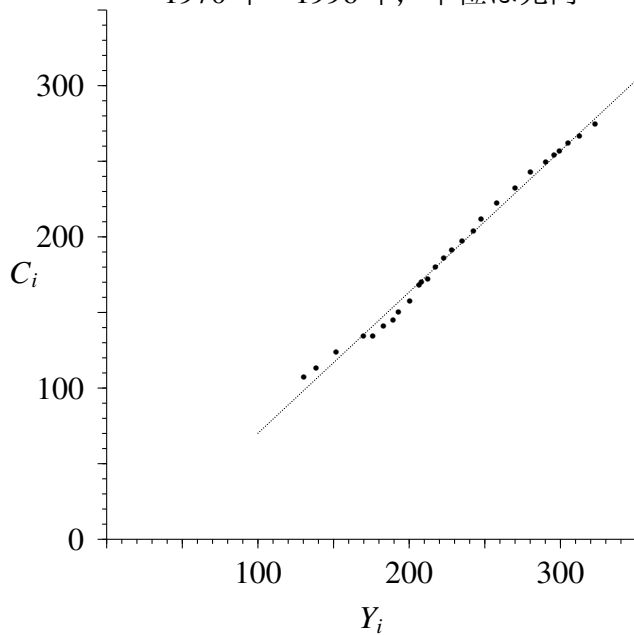
$$C_i = \frac{-23216.7}{(3844.54)} + \frac{.933542}{(.016333)} Y_i,$$

$$R^2 = .992406, \quad \bar{R}^2 = .992102,$$

$$s = 4557.04, \quad DW = .289838,$$

Figure 1: 実質消費 (縦軸) と実質所得 (横軸)

1970年～1996年, 単位は兆円



ただし、係数の推定値の下の括弧内は、係数推定値の標準誤差を表すものとする。

1. 推定値の符号条件について、基礎消費の推定値 $\hat{\alpha}$ は -23216.7 で負、限界消費性向の推定値 $\hat{\beta}$ は 0.933542 で正となっている。基礎消費については符号条件を満たさないが、限界消費性向は符号条件を満たす。

2. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ から、 α, β の符号を統計的に調べる。

(a) データ数は 27、推定すべきパラメータ数は 2 なので、自由度は $27 - 2 = 25$ となる。

(b) $\alpha = 0.05$ のとき $t_{\alpha/2}(25) = 2.060$ 、 $\alpha = 0.01$ のとき $t_{\alpha/2}(25) = 2.787$ である。

(c) 有意水準 0.05 のとき、 $H_0: \alpha = 0$ 、 $H_1: \alpha \neq 0$ の結果は、

$$\frac{-23216.7}{3844.54} = -6.039 < -t_{0.025}(25) = -2.060,$$

有意水準 0.05 のとき、 $H_0: \beta = 0$ 、 $H_1: \beta \neq 0$ の結果は、

$$\frac{.933542}{.016333} = 57.16 > t_{0.025}(25) = 2.060,$$

となり、共に統計的に有意である。

(d) したがって、実証結果から、真の基礎消費 α は負、真の限界消費性向 β は正という結論になる。

(e) $\beta > 0$ を統計的に示したが、本当は $\beta < 1$ も示すべきである。すなわち、 $H_0: \beta = 1$, $H_1: \beta \neq 1$ も検定すべきである。(省略)

(f) 基礎消費は正となるべきなので、経済理論と矛盾する。

(g) 次に行うべき分析は、なぜ矛盾したかを追求すること。
⇒ 最初に考えた理論が間違っていた、構造変化のためだった、推定式が最小二乗法の仮定を満たしていなかった、……

3. $s = 4557.04$ は、誤差項 u_i の標準偏差 σ^2 の推定値 (すなわち、回帰の標準誤差) である。

4. 自由度修正済み決定係数は $\bar{R}^2 = 0.992102$ であり、非常に 1 に近い値が得られたことから、消費と所得の間の関係を表す回帰式の当てはまりは非常に良いと言える。

5. DW について、 $n = 27, k = 2$ の 5% 点の値は $dl = 1.32, du = 1.47$ であるので、5% で、

- (a) $DW < 1.32$ のとき，誤差項に正の系列相関がある。
- (b) $1.32 \leq DW < 1.47$ のとき，判定不能。
- (c) $1.47 \leq DW < 2.53$ のとき，誤差項に系列相関はない。
- (d) $2.53 \leq DW < 2.68$ のとき，判定不能。
- (e) $2.68 \leq DW$ のとき，誤差項に負の系列相関がある。

となる。

この場合， $DW = 0.289838$ なので，誤差項に正の系列相関が見られる。

⇒ 最小二乗法の仮定を満たしていない。

⇒ $t(25)$ 分布を検定に使うことができないので，今までの検定結果は間違っている可能性がある。

次に，誤差項に系列相関（一階の自己相関）があるモデル

$$C_i = \alpha + \beta Y_i + u_i,$$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i,$$

の推定を行う。ただし， ϵ_i は互いに独立に正規分布するものと仮定する。

ρ の推定値 $\widehat{\rho}$ は、最小二乗法の推定結果の DW を用いて、 $\widehat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2} = 1 - \frac{.2898375}{2} = .855081$ を得る。データを、次のように変換する。

$$C_i^* = C_i - \widehat{\rho}C_{i-1},$$

$$Y_i^* = Y_i - \widehat{\rho}Y_{i-1},$$

そして、

$$C_i^* = \alpha' + \beta Y_i^* + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma_\epsilon^2),$$

を推定する。ただし、 $\alpha' = \alpha(1 - \rho)$ に注意。

結果は、以下の通りとなる。

$$C_i^* = \frac{-3679.78}{(2183.63)} + \frac{.930350}{(.054012)} Y_i^*,$$

$$R^2 = .922288, \quad \overline{R}^2 = .919180,$$

$$s = 2232.08, \quad DW = 1.35684,$$

ただし、係数の推定値の下の括弧内は、係数推定値の標準誤差を表すものとする。

1. この場合、データ数は26、推定すべきパラメータ数は2なので、自由度は $26 - 2 = 24$ となる。
2. 基礎消費の推定値 $\hat{\alpha}$ は、 $\hat{\alpha} = \frac{\hat{\alpha}'}{1 - \hat{\rho}}$ によって求められ、 $\frac{-3679.78}{1 - .855081} = -25392.0$ で負、限界消費性向の推定値 $\hat{\beta}$ は .930350 で正となる。
3. 真の基礎消費の符号を統計的に調べる。基礎消費 α の符号は α' の符号と同じなので、 α' の符号を $\hat{\alpha}'$ から調べる。
有意水準 0.05 のとき、

$$\frac{-3679.78}{2183.63} = -1.685 > -t_{0.025}(24) = -2.064,$$

となり、 α' が負だとは言えない。

4. α は正の可能性もある。
5. したがって、推定結果から、最初に考えた理論モデルが間違っているとは言えない。

6. β について、有意水準 0.05 のとき、

$$\frac{.930350}{.054012} = 17.225 > t_{0.025}(24) = 2.064,$$

となり、統計的に有意である。

7. $s = 2232.08$ は、誤差項 ϵ_i の標準偏差 σ_ϵ^2 の推定値 (すなわち、回帰の標準誤差) である。

8. 自由度修正済み決定係数 \bar{R}^2 について、最初の推定結果では 0.992102 となり、今回の推定結果では .919180 と小さくなっている。

⇒ 「回帰式の当てはまりが悪くなった」と考えるのは間違い。

被説明変数の値自体が、最初の推定結果と今回のものとは異なるため、 \bar{R}^2 の比較は不適當。

⇒ 回帰の標準誤差 (4557.04 と 2232.08) で比較すべき。後者の方が小さいため、後者の方が回帰式の当てはまりは良いと言える。

9. DW も 1.35684 となり、 $1.32 \leq DW < 1.47$ であるので、系列相関の有無を判定できない。

⇒ 「明らかに誤差項に系列相関がある」とは言えない。

⇒ この式で、信頼区間、仮説検定を行うべき。

● Stata による出力結果

データは、

<http://www2.econ.osaka-u.ac.jp/~tanizaki/class/2011/econome/cons.csv>

からダウンロード可

```
-----  
. tsset year  
   time variable: year, 1970 to 1996  
      delta: 1 unit  
  
. gen ryd=yd/(pcons/100)  
  
. gen rcons=cons/(pcons/100)  
  
. reg rcons ryd  
  
-----+-----  
Source |      SS      df      MS                Number of obs =      27  
-----+-----+-----+-----+-----+-----  
Model | 6.7845e+10      1 6.7845e+10      F( 1, 25) = 3267.05  
Residual | 519164248      25 20766569.9      Prob > F      = 0.0000  
-----+-----+-----+-----+-----+-----  
R-squared      = 0.9924
```

Adj R-squared = 0.9921
 Root MSE = 4557

-----+-----
 Total | 6.8365e+10 26 2.6294e+09

```
-----+-----
rcons |      Coef.  Std. Err.      t    P>|t|    [95% Conf. Interval]
-----+-----
ryd   |   .9335422   .0163326   57.16  0.000   .8999045   .9671799
_cons |  -23216.75  3844.539   -6.04  0.000  -31134.72  -15298.77
-----+-----
```

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(2, 27) = .2898375

. gen rho=1-0.5*.2898375

. gen drcons=rcons-rho*1.rcons
 (1 missing value generated)

. gen dryd=ryd-rho*1.ryd
 (1 missing value generated)

. reg drcons dryd

```
-----+-----
Source |      SS      df      MS                Number of obs =      26
-----+-----
Model | 1.3558e+09   1 1.3558e+09          F( 1, 24) = 261.29
Residual | 124530197   24 5188758.21          Prob > F      = 0.0000
-----+-----
Total | 1.4803e+09   25 59212957          R-squared      = 0.9159
                                           Adj R-squared  = 0.9124
                                           Root MSE      = 2277.9
-----+-----
```

```
-----+-----
drcons |      Coef.  Std. Err.      t    P>|t|    [95% Conf. Interval]
-----+-----
dryd   |   .9315055   .0576262   16.16  0.000   .8125708   1.05044
_cons |  -3731.757  2353.261   -1.59  0.126  -8588.649   1125.134
-----+-----
```


途中で,

$$DRCONS_i = RCONS_i - \widehat{\rho} RCONS_{i-1}$$

$$DRY_i = RY_i - \widehat{\rho} RY_{i-1}$$

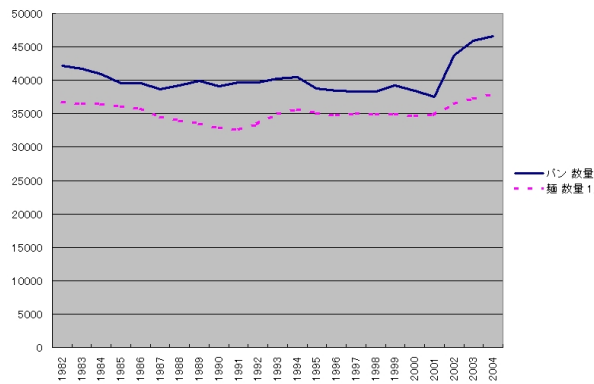
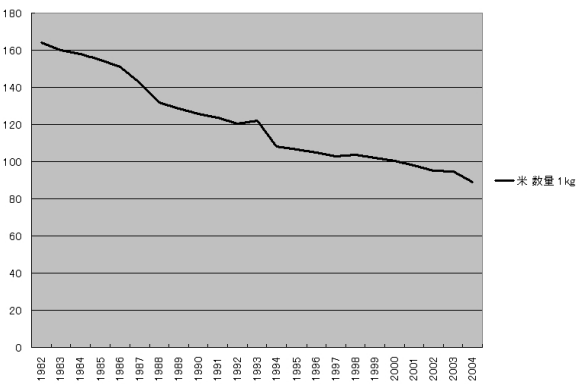
として, データをの変換 (ただし, $\widehat{\rho} = 1 - .5DW = 1 - .5 \times .2898375$)

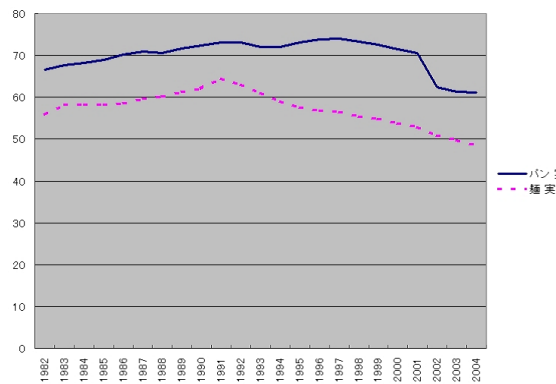
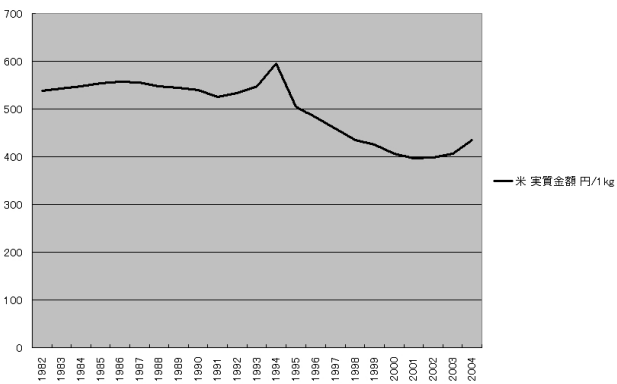
11.2 ミクロの消費関数 (需要関数)

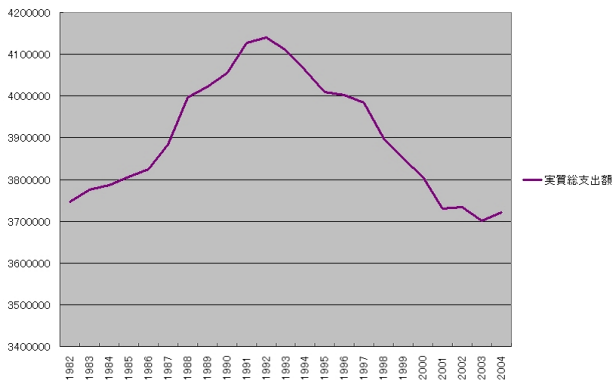
米, パン, 麺の選択を考える。

1世帯当たり年間の品目別支出金額，購入数量
及び平均価格（全世帯・勤労者世帯）

年	米		パン		麺		総支出 額	消費者 物価指数 (全国総合)
	数量 1kg	金額 1kg	数量 1g	金額 100g	数量 1g	金額 100g		
i	Q_{1i}	P_{1i}	Q_{2i}	P_{2i}	Q_{3i}	P_{3i}	E_i	P_i
1982	164.22	435.98	42161	54.04	36854	45.32	3038024	0.811
1983	160.14	448.20	41745	55.88	36492	47.97	3114247	0.825
1984	158.06	461.69	40890	57.62	36500	49.21	3195829	0.844
1985	154.51	477.41	39545	59.42	36099	50.20	3277373	0.861
1986	150.96	482.80	39532	60.86	35859	50.74	3316493	0.867
1987	142.60	482.67	38710	61.53	34576	51.83	3371326	0.868
1988	132.04	478.40	39218	61.75	33971	52.65	3493468	0.874
1989	128.40	486.37	39927	63.99	33603	54.71	3592205	0.893
1990	125.78	497.33	39157	66.71	32890	57.14	3734084	0.921
1991	123.82	499.36	39659	69.57	32615	61.44	3925358	0.951
1992	120.58	516.05	39697	70.75	33401	61.06	4003931	0.967
1993	121.93	536.85	40209	70.51	35085	59.80	4022955	0.979
1994	107.99	587.50	40458	71.08	35760	58.37	4006086	0.986
1995	106.42	496.64	38766	71.97	35096	56.77	3948741	0.985
1996	104.91	476.26	38436	72.74	34804	55.90	3946187	0.986
1997	102.81	460.70	38333	74.39	35061	56.77	3999759	1.004
1998	103.53	439.24	38287	74.10	34956	55.98	3938235	1.010
1999	101.99	427.60	39246	73.00	34963	55.37	3876091	1.007
2000	100.40	406.82	38480	71.47	34722	53.83	3805600	1.000
2001	97.83	394.67	37554	70.12	34753	52.52	3704298	0.993
2002	95.15	391.28	43727	61.34	36493	50.11	3673550	0.984
2003	94.83	398.37	45876	60.12	37302	48.93	3631473	0.981
2004	89.02	426.12	46682	59.92	37957	47.72	3650436	0.981







●線型関数

$$Q_{1i} = \frac{397.0}{(8.89)} - \frac{0.00018}{(9.35)} \frac{E_i}{P_i} + \frac{0.194}{(4.39)} \frac{P_{1i}}{P_i} + \frac{0.184}{(0.29)} \frac{P_{2i}}{P_i} + \frac{5.614}{(5.57)} \frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 6.86, \quad R^2 = 0.932, \quad \bar{R}^2 = 0.917, \quad DW = 1.532$$

$$Q_{2i} = \frac{61946.7}{(13.9)} + \frac{0.00893}{(4.62)} \frac{E_i}{P_i} + \frac{4.014}{(0.91)} \frac{P_{1i}}{P_i} - \frac{710.4}{(11.4)} \frac{P_{2i}}{P_i} - \frac{152.5}{(1.51)} \frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 685.1, \quad R^2 = 0.931, \quad \bar{R}^2 = 0.915, \quad DW = 1.334$$

$$Q_{3i} = \frac{56642.5}{(16.9)} - 0.00098 \frac{E_i}{P_i} + \frac{17.9}{(5.40)} \frac{P_{1i}}{P_i} - 48.8 \frac{P_{2i}}{P_i} - \frac{403.6}{(5.32)} \frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 515.7, \quad R^2 = 0.885, \quad \bar{R}^2 = 0.860, \quad DW = 1.044$$

● 対数線型

$$\log Q_{1i} = \frac{70.9}{(10.4)} - \frac{5.35}{(10.4)} \log \frac{E_i}{P_i} + \frac{0.705}{(4.53)} \log \frac{P_{1i}}{P_i} - \frac{0.018}{(0.06)} \log \frac{P_{2i}}{P_i} + \frac{2.68}{(6.46)} \log \frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 0.048, \quad R^2 = 0.949, \quad \bar{R}^2 = 0.937, \quad DW = 1.713$$

$$\log Q_{2i} = \frac{4.35}{(1.88)} + \frac{0.753}{(4.33)} \log \frac{E_i}{P_i} + \frac{0.063}{(1.21)} \log \frac{P_{1i}}{P_i} - \frac{1.135}{(10.9)} \log \frac{P_{2i}}{P_i} - \frac{0.184}{(1.31)} \log \frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 0.016, \quad R^2 = 0.931, \quad \bar{R}^2 = 0.916, \quad DW = 1.317$$

$$\log Q_{3i} = \frac{14.5}{(6.87)} - \frac{0.188}{(1.19)} \log \frac{E_i}{P_i} + \frac{0.266}{(5.51)} \log \frac{P_{1i}}{P_i} - \frac{0.025}{(0.27)} \log \frac{P_{2i}}{P_i} - \frac{0.682}{(5.30)} \log \frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 0.015, \quad R^2 = 0.883, \quad \bar{R}^2 = 0.856, \quad DW = 1.067$$

● 対数線型 (変数を減らす)

$$\log Q_{1i} = \frac{70.9}{(10.9)} - \frac{5.36}{(11.2)} \log \frac{E_i}{P_i} + \frac{0.709}{(5.23)} \log \frac{P_{1i}}{P_i} + \frac{2.67}{(7.69)} \log \frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 0.047, \quad R^2 = 0.949, \quad \bar{R}^2 = 0.941, \quad DW = 1.724$$

$$\log Q_{3i} = \frac{14.7}{(7.24)} - \frac{0.200}{(1.35)} \log \frac{E_i}{P_i} + \frac{0.271}{(6.45)} \log \frac{P_{1i}}{P_i} - \frac{0.700}{(6.49)} \log \frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 0.014, \quad R^2 = 0.882, \quad \bar{R}^2 = 0.863, \quad DW = 1.122$$

● Stata による出力結果

データは,

<http://www2.econ.osaka-u.ac.jp/~tanizaki/class/2011/econome/demand.csv>

からダウンロード可

```
. tsset year
      time variable: year, 1982 to 2004
      delta: 1 unit
```

```
. gen re=e/p
```

```
. gen rp1=p1/p
```

```
. gen rp2=p2/p
```

```
. gen rp3=p3/p
```

```
. reg q1 re rp1 rp2 rp3
```

Source	SS	df	MS	Number of obs = 23	
Model	11605.1437	4	2901.28592	F(4, 18)	= 62.32
Residual	837.923294	18	46.5512941	Prob > F	= 0.0000
				R-squared	= 0.9327
				Adj R-squared	= 0.9177
Total	12443.067	22	565.593953	Root MSE	= 6.8229

q1	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
re	-.0001813	.0000192	-9.43	0.000	-.0002217	-.0001409
rp1	.1935249	.043943	4.40	0.000	.101204	.2858457
rp2	.1825145	.621349	0.29	0.772	-1.122891	1.48792
rp3	5.623917	1.003036	5.61	0.000	3.516618	7.731217
_cons	397.3071	44.31083	8.97	0.000	304.2135	490.4007

```
. dwstat
```

```
Durbin-Watson d-statistic( 5, 23) = 1.538178
```

```
. reg q2 re rp1 rp2 rp3
```

Source	SS	df	MS	Number of obs = 23	
Model	113479303	4	28369825.8	F(4, 18)	= 60.62
				Prob > F	= 0.0000

Residual		8424108.48	18	468006.027	R-squared	=	0.9309

Total		121903412	22	5541064.17	Adj R-squared	=	0.9155
					Root MSE	=	684.11

q2		Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
re		.0089294	.0019288	4.63	0.000	.004877 .0129817
rp1		3.975941	4.406052	0.90	0.379	-5.28083 13.23271
rp2		-710.4687	62.30106	-11.40	0.000	-841.3584 -579.5791
rp3		-152.1237	100.5718	-1.51	0.148	-363.4172 59.16979
_cons		61930.62	4442.933	13.94	0.000	52596.36 71264.87

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(5, 23) = 1.340373

. reg q3 re rp1 rp2 rp3

Source		SS	df	MS	Number of obs	=	23

Model		37006848.3	4	9251712.07	F(4, 18)	=	34.82
Residual		4782689.62	18	265704.979	Prob > F	=	0.0000

Total		41789537.9	22	1899524.45	R-squared	=	0.8856
					Adj R-squared	=	0.8601
					Root MSE	=	515.47

q3		Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
re		-.00097	.0014534	-0.67	0.513	-.0040234 .0020834
rp1		17.89258	3.31989	5.39	0.000	10.91775 24.86741
rp2		-48.87487	46.94286	-1.04	0.312	-147.4982 49.74843
rp3		-403.4164	75.77925	-5.32	0.000	-562.6227 -244.2101
_cons		56606.16	3347.679	16.91	0.000	49572.95 63639.37

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(5, 23) = 1.047824

```

. gen lq1=log(q1)
. gen lq2=log(q2)
. gen lq3=log(q3)
. gen lre=log(re)
. gen lrp1=log(rp1)
. gen lrp2=log(rp2)
. gen lrp3=log(rp3)
. reg lq1 lre lrp1 lrp2 lrp3

```

Source	SS	df	MS	
Model	.766574852	4	.191643713	Number of obs = 23
Residual	.04086074	18	.002270041	F(4, 18) = 84.42
Total	.807435592	22	.036701618	Prob > F = 0.0000
				R-squared = 0.9494
				Adj R-squared = 0.9381
				Root MSE = .04764

	lq1	lre	lrp1	lrp2	lrp3	_cons
Coef.	-5.355623	.7030891	-.01919	2.687511	70.90628	
Std. Err.	.5092073	.1547336	.3056177	.4126367	6.78413	
t	-10.52	4.54	-0.06	6.51	10.45	
P> t	0.000	0.000	0.951	0.000	0.000	
[95% Conf. Interval]	-6.425428 -4.285818	.3780058 1.028172	-.6612689 .622889	1.820594 3.554429	56.65335 85.15921	

```

. dwstat

```

```

Durbin-Watson d-statistic( 5, 23) = 1.720916

```

```

. reg lq2 lre lrp1 lrp2 lrp3

```

Source	SS	df	MS	Number of obs =	23
Model	.064720875	4	.016180219	F(4, 18) =	61.41
Residual	.004742568	18	.000263476	Prob > F =	0.0000
Total	.069463442	22	.003157429	R-squared =	0.9317

Adj R-squared = 0.9166
Root MSE = 0.01623

lq2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
lre	.7530252	.1734795	4.34	0.000	.3885582	1.117492
lrp1	.0633603	.0527155	1.20	0.245	-.0473909	.1741114
lrp2	-1.135159	.1041195	-10.90	0.000	-1.353906	-.9164119
lrp3	-.1838809	.1405793	-1.31	0.207	-.4792271	.1114654
_cons	4.346289	2.311255	1.88	0.076	-.5094776	9.202055

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(5, 23) = 1.323931

. reg lq3 lre lrp1 lrp2 lrp3

Source	SS	df	MS	Number of obs =	23
Model	.029851208	4	.007462802	F(4, 18) =	33.83
Residual	.003971008	18	.000220612	Prob > F =	0.0000
Total	.033822216	22	.001537373	R-squared =	0.8826

Adj R-squared = 0.8565
Root MSE = 0.01485

lq3	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
lre	-.1868154	.158742	-1.18	0.255	-.52032	.1466892
lrp1	.2652044	.0482372	5.50	0.000	.1638618	.366547
lrp2	-.0255097	.0952743	-0.27	0.792	-.2256736	.1746542
lrp3	-.6819342	.1286368	-5.30	0.000	-.95219	-.4116784
_cons	14.52537	2.114908	6.87	0.000	10.08212	18.96863

```
. dwstat
```

```
Durbin-Watson d-statistic( 5, 23) = 1.071649
```

```
. reg lq1 lre lrp1 lrp3
```

Source	SS	df	MS	Number of obs =	23
Model	.766565902	3	.255521967	F(3, 19) =	118.79
Residual	.040869691	19	.002151036	Prob > F =	0.0000
				R-squared =	0.9494
				Adj R-squared =	0.9414
Total	.807435592	22	.036701618	Root MSE =	.04638

lq1	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
lre	-5.364744	.4750821	-11.29	0.000	-6.359103 -4.370386
lrp1	.7074307	.1347484	5.25	0.000	.425399 .9894623
lrp3	2.67427	.345262	7.75	0.000	1.951629 3.396912
_cons	70.98983	6.47565	10.96	0.000	57.43613 84.54352

```
. dwstat
```

```
Durbin-Watson d-statistic( 4, 23) = 1.733124
```

```
. reg lq3 lre lrp1 lrp3
```

Source	SS	df	MS	Number of obs =	23
Model	.029835392	3	.009945131	F(3, 19) =	47.40
Residual	.003986824	19	.000209833	Prob > F =	0.0000
				R-squared =	0.8821
				Adj R-squared =	0.8635
Total	.033822216	22	.001537373	Root MSE =	.01449

lq3	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
lre	-.1989407	.1483821	-1.34	0.196	-.509508 .1116267
lrp1	.2709758	.0420859	6.44	0.000	.182889 .3590625

```
lrp3 | -.6995357 .1078355 -6.49 0.000 -.925238 -.4738335
_cons | 14.63644 2.022536 7.24 0.000 10.40322 18.86965
```

```
. dwstat
```

```
Durbin-Watson d-statistic( 4, 23) = 1.127541
```

11.3 株価，金利，為替レート

東証株価・日経225種平均・終値・円



東京・終値・円/ドル



普通国債(東京店頭最長期物)



$$\text{Kabu}_i = - \underset{(2.58)}{1883.1} + \underset{(8.27)}{46.3} \text{ExRate}_i + \underset{(51.7)}{6802.6} R_i$$

$$s = 2309.9, \quad R^2 = 0.570, \quad \bar{R}^2 = 0.570, \quad DW = 0.021$$

$$\text{Kabu}_i = - \underset{(0.03)}{2.36} + \underset{(0.31)}{0.164} \text{ExRate}_i + \underset{(1.96)}{36.5} R_i + \underset{(482)}{0.995} \text{Kabu}_{i-1}$$

$$s = 214.8, \quad R^2 = 0.996, \quad \bar{R}^2 = 0.996, \quad DW = 2.100$$

$$\Delta \text{Kabu}_i = \frac{8.11}{(0.119)} - \frac{0.091}{(0.173)} \text{ExRate}_i - \frac{0.862}{(0.070)} R_i$$

$$s = 215.1, \quad R^2 = 0.000015, \quad \bar{R}^2 = -0.00097, \quad DW = 2.106$$

● Stata による出力結果

データは,

<http://www2.econ.osaka-u.ac.jp/~tanizaki/class/2011/econome/nikkei.csv>

からダウンロード可

```
-----
. gen time=_n
. tsset time
    time variable:  time, 1 to 2028
                delta: 1 unit
. reg kabu exrate r

Source |         SS          df           MS                Number of obs =   2028
-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----
    Model | 1.4318e+10          2  7.1590e+09                F( 2, 2025) = 1341.74
    Residual | 1.0805e+10        2025  5335630.99                Prob > F      = 0.0000
-----+-----+-----+-----+-----+-----
                                         R-squared      = 0.5699
                                         Adj R-squared  = 0.5695
```


Total | 2.5123e+10 2027 12394036.8 Root MSE = 2309.9

kabu	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
exrate	46.30522	5.601817	8.27	0.000	35.3193	57.29115
r	6802.61	131.6017	51.69	0.000	6544.521	7060.699
_cons	-1883.071	730.508	-2.58	0.010	-3315.696	-450.4449

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(3, 2028) = .021141

. reg kabu exrate r l.kabu

Source	SS	df	MS	Number of obs =	2027
Model	2.4997e+10	3	8.3323e+09	F(3, 2023) =	.
Residual	93298782.6	2023	46119.0225	Prob > F =	0.0000
				R-squared =	0.9963
				Adj R-squared =	0.9963
Total	2.5090e+10	2026	12384078.2	Root MSE =	214.75

kabu	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
exrate	.1643596	.5295945	0.31	0.756	-.8742481	1.202967
r	36.51834	18.6521	1.96	0.050	-.060989	73.09767
kabu						
l1.	.9945113	.002064	481.84	0.000	.9904636	.998559
_cons	-2.359124	68.05383	-0.03	0.972	-135.822	131.1038

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(4, 2027) = 2.100248

. reg dkabu exrate r if tin(2,2028)

Source	SS	df	MS	
Model	1443.23541	2	721.617703	Number of obs = 2027
Residual	93624927.9	2024	46257.3754	F(2, 2024) = 0.02
Total	93626371.1	2026	46212.424	Prob > F = 0.9845

				R-squared = 0.0000
				Adj R-squared = -0.0010
				Root MSE = 215.08

dkabu	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
exrate	-.0906022	.5216244	-0.17	0.862	-1.113579 .9323746
r	-.8624553	12.27849	-0.07	0.944	-24.94225 23.21734
_cons	8.109931	68.0417	0.12	0.905	-125.3291 141.549

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(3, 2027) = 2.106308

12 推定量の求め方

12.1 最小二乗法

- n 個のデータ (実現値) : x_1, x_2, \dots, x_n
 - 背後に対応する確率変数を仮定 : X_1, X_2, \dots, X_n
 - $E(X_i) = \mu, V(X_i) = \sigma^2$ を仮定

母数 (μ, σ^2) を推定する。

観測データ x_1, x_2, \dots, x_n をもとにして、 μ の最小二乗推定値を求める。

$$\min_{\mu} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

μ の解を $\widehat{\mu}$ とすると、

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

となり、 $\widehat{\mu} \equiv \bar{x}$ を得る。

すなわち、

$$\frac{d \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{d\mu} = 0$$

を μ について解く。

μ の最小二乗推定量はデータ x_i を対応する確率変数 X_i で置き換えて、

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

となり、 $\hat{\mu} \equiv \bar{X}$ を得る ($\hat{\mu}$ について、推定値と推定量は同じ記号を使っている)。

以上を回帰分析に応用すると、

$$\min_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

を解くことになる。

すなわち、

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2}{\partial \alpha} = 0$$
$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2}{\partial \beta} = 0$$

の連立方程式を α, β について解く。

12.2 最尤法

n 個の確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で、同じ確率分布 $f(x) \equiv f(x; \theta)$ とする。ただし、 θ は母数で、例えば、 $\theta = (\mu, \sigma^2)$ である。

X_1, X_2, \dots, X_n の結合分布は、互いに独立なので、

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \equiv \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

と表される。

観測データ x_1, x_2, \dots, x_n を与えたもとの、 $\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$ は θ の関数として表される。すなわち、

$$l(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

となる。

$l(\theta)$ を尤度関数と呼ぶ。

$$\max_{\theta} l(\theta)$$

となる θ を最尤推定値 $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と呼ぶ。

データ x_1, x_2, \dots, x_n を確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n で置き換えて、 $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ を最尤推定量と呼ぶ。