12.3　尤度比検定

n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で，同じ確率分布 $f(x) \equiv f(x;\theta)$ とする。

尤度関数は,

$$l(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

となる。

θ の制約つき最尤推定量を $\widetilde{\theta}$，制約無し最尤推定量を $\widehat{\theta}$ とする。

制約の数を G 個とする。

$\dfrac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})}$ を尤度比と呼ぶ

検定方法 1：　尤度比がある値より小さいときに，帰無仮説を棄却する。すなわち,

$$\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})} < c$$

となるときに，帰無仮説を棄却する。この場合，c を次のようにして求める必要がある。

$$\int\cdots\int\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\widetilde{\theta})\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\alpha$$

ただし，α は有意水準（帰無仮説が正しいときに，帰無仮説を棄却する確率）を表す。

検定方法 2（大標本検定）:　または，$n\longrightarrow\infty$ のとき，

$$-2\log\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})}\longrightarrow\chi^2(G)$$

となる。

　この検定を尤度比検定と呼ぶ。

例 1 :　正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ からの標本値 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ を用いて，σ^2 が既知のとき，帰無仮説 H_0：$\mu=\mu_0$，H_1：$\mu\neq\mu_0$ の尤度比検定を行う。

σ^2 が既知のとき，尤度関数 $l(\mu)$ は，

$$l(\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\Bigr)$$

となる。

$l(\mu)$ を最大にする μ と $\log l(\mu)$ を最大にする μ は同じになる。

μ の最尤推定量は，

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv \overline{X}$$

となる。

尤度比検定統計量は，

$$\frac{l(\mu_0)}{l(\overline{X})} = \frac{\exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2\Bigr)}{\exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\Bigr)}$$

$$= \exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2/n}(\overline{X} - \mu_0)^2\Bigr) < c$$

となる c を求める。

H_0 が正しいときに， $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)/\sigma \sim N(0,1)$ となるので，

$$P\Big(\Big|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}\Big) = \alpha$$

すなわち，

$$P\Big(\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2/n}(\overline{X}-\mu_0)^2\Big) < \exp\Big(-\frac{1}{2}z_{\alpha/2}^2\Big)\Big) = \alpha$$

と変形できる。したがって，

$$c = \exp\Big(-\frac{1}{2}z_{\alpha/2}^2\Big)$$

とすればよい。

例 2： $X_1, X_n, \cdots, X_n$ は互いに独立で，それぞれパラメータ p を持ったベルヌイ分布に従うものとする。すなわち，X_i の確率関数は，

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x} \qquad x = 0, 1$$

となる。

このとき尤度関数は,

$$l(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

となる。

p の最尤推定量 $\widehat{p}$ は,

$$\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

である。

次の仮説検定を考える。

$$H_0:\ p = p_0 \qquad\qquad H_1:\ p \neq p_0$$

→ 制約数は 1 つ。$(G = 1)$

尤度比は,

$$\frac{l(p_0)}{l(\widehat{p})} = \frac{\prod_{i=1}^{n} p_0^{X_i}(1-p_0)^{1-X_i}}{\prod_{i=1}^{n} \widehat{p}^{X_i}(1-\widehat{p})^{1-X_i}}$$

したがって，$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$$-2\log\frac{l(p_0)}{l(\widehat{p})} = -2\log\frac{p_0}{\widehat{p}}\sum_{i=1}^{n}X_i - 2\log\frac{1-p_0}{1-\widehat{p}}\sum_{i=1}^{n}(1-X_i)$$

$\longrightarrow\ \chi^2(1)$

$\chi^2(1)$ 分布の上側 100 α% 点を $\chi^2_\alpha(1)$ とするとき，

$$-2\log\frac{l(p_0)}{l(\widehat{p})} > \chi^2_\alpha(1)$$

のとき，帰無仮説 H_0： $p = p_0$ を棄却する。

例 3： 回帰モデル

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$
$$u_i \sim N(0, \sigma^2) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

について，$\beta_1, \cdots, \beta_k$ に関する仮説の尤度比検定を行う。

例えば,

$$H_0:\ \beta_1 = 0$$
$$H_0:\ \beta_1 + \beta_2 = 1$$
$$H_0:\ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

などのような仮説検定

$\theta = (\beta_1, \cdots, \beta_k, \sigma^2)$ とする。
尤度関数は,

$$l(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(Y_i; \theta)$$
$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_1 X_{1i} - \cdots - \beta_k X_{ki})^2\Bigr)$$

となる。

H_0 の制約つき最尤推定量を $\widetilde{\theta} = (\widetilde{\beta}_1, \cdots, \widetilde{\beta}_k, \widetilde{\sigma}^2)$ とする。この仮設に含まれる制約数を G とする。

制約なし最尤推定量を $\widehat{\theta} = (\widehat{\beta}_1, \cdots, \widehat{\beta}_k, \widehat{\sigma}^2)$ とする。

尤度比

$$
\begin{aligned}
\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})}
&= \frac{(2\pi\widetilde{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Bigl(-\frac{1}{2\widetilde{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widetilde{\beta}_1 X_{1i}-\cdots-\widetilde{\beta}_k X_{ki})^2\Bigr)}{(2\pi\widehat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Bigl(-\frac{1}{2\widehat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{\beta}_1 X_{1i}-\cdots-\widehat{\beta}_k X_{ki})^2\Bigr)} \\
&= \frac{(\widetilde{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Bigl(-\frac{n-G}{2}\Bigr)}{(\widehat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Bigl(-\frac{n-k}{2}\Bigr)} \\
&= \left(\frac{\frac{1}{n-G}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{u}_i^2}{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2}\right)^{-n/2} \exp\Bigl(-\frac{k-G}{2}\Bigr) \\
&= \exp\Bigl(-\frac{k-G}{2}\Bigr)\left(\frac{n-k}{n-G}\right)^{-n/2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\widetilde{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2}\right)^{-n/2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(-\frac{k-G}{2}\right)\left(\frac{n-k}{n-G}\right)^{-n/2} \\
&\quad \times \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}\widetilde{u}_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2}\right)^{-n/2} \\
&= \exp\left(-\frac{k-G}{2}\right)\left(\frac{n-k}{n-G}\right)^{-n/2} \\
&\quad \times \left(1 + \frac{G}{n-k}\frac{(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{u}_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2)/G}{\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2/(n-k)}\right)^{-n/2} \\
&< c
\end{aligned}
$$

のとき仮説を棄却する。

$$
\frac{(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{u}_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2)/G}{\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2/(n-k)} \sim F(G, n-k)
$$

を利用すると c が求まる。

ただし，途中で以下を利用

$$
\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-G}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widetilde{\beta}_1 X_{1i} - \cdots - \widetilde{\beta}_k X_{ki})^2
$$

$$= \frac{1}{n-G}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{u}_i^2$$

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\beta}_1 X_{1i} - \cdots - \widehat{\beta}_k X_{ki})^2 \\ &= \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2\end{aligned}$$

近似的には,

$$\begin{aligned}-2\log\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})} &= -2\log\frac{(\widetilde{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\Bigl(-\dfrac{n-G}{2}\Bigr)}{(\widehat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\Bigl(-\dfrac{n-k}{2}\Bigr)} \\ &= n\log\Bigl(\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}^2}\Bigr) + (k-G) \\ &\longrightarrow \chi^2(G)\end{aligned}$$

例 **4**： 回帰モデル

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \alpha + \beta X_i + u_i \\
u_i &= \rho u_{i-1} + \epsilon_i \\
\epsilon_i &\sim N(0, \sigma^2) \qquad i = 2, 3, \cdots, n
\end{aligned}
$$

について，H_0：$\rho = 0$，H_1：$\rho \neq 0$ の尤度比検定を行う。

$\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, \rho)$ とする。対数尤度関数は，

$$
\begin{aligned}
\log l(\theta) = \sum_{i=2}^{n} \log f(Y_i; \theta) &= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\sigma^2) \\
&\quad -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i - \rho Y_{i-1}) - \alpha(1-\rho) - \beta(X_i - \rho X_{i-1})\Big)^2
\end{aligned}
$$

となる。

対数尤度関数をそれぞれ α，β，σ^2，ρ について微分し，ゼロとおく。4 本の連立方程式を解いて，制約なし最尤推定量 $\widehat{\theta} = (\widehat{\alpha},\ \widehat{\beta},\ \widehat{\sigma}^2,\ \widehat{\rho})$ が得られる。

$\rho = 0$ と制約をおく。$\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, 0)$ とする。対数尤度関数は,

$$\log l(\theta) = \sum_{i=2}^{n} \log f(Y_i; \theta) = -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\sigma^2)$$
$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}(Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

となる。

上記の対数尤度関数をそれぞれ α，β，σ^2 について微分し，ゼロとおく。3本の連立方程式を解いて，$\rho = 0$ の制約付き最尤推定量 $\widetilde{\theta} = (\widetilde{\alpha}$，$\widetilde{\beta}$，$\widetilde{\sigma}^2$，$0)$ が得られる。

すなわち,

$$\frac{\max_{\alpha,\beta,\sigma^2} l(\alpha, \beta, \sigma^2, 0)}{\max_{\alpha,\beta,\sigma^2,\rho} l(\alpha, \beta, \sigma^2, \rho)} = \frac{l(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\sigma}^2, 0)}{l(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\sigma}^2, \widehat{\rho})} = \frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})}$$

$\log l(\widehat{\theta})$ は，$\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i - \widehat{\rho}Y_{i-1}) - \widehat{\alpha}(1-\widehat{\rho}) - \widehat{\beta}(X_i - \widehat{\rho}X_{i-1})\Big)^2$ に注意して，

$$
\begin{aligned}
\log l(\widehat{\theta}) &= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\widehat{\sigma}^2) \\
&\quad -\frac{1}{2\widehat{\sigma}^2}\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i - \widehat{\rho}Y_{i-1}) - \widehat{\alpha}(1-\widehat{\rho}) - \widehat{\beta}(X_i - \widehat{\rho}X_{i-1})\Big)^2 \\
&= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\widehat{\sigma}^2) - \frac{n-1}{2}
\end{aligned}
$$

となる。

同様に，$\log l(\widetilde{\theta})$ は，$\widetilde{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=2}^{n}(Y_i - \widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta}X_i)^2$ に注意して，

$$
\begin{aligned}
\log l(\widetilde{\theta}) &= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\widetilde{\sigma}^2) \\
&\quad -\frac{1}{2\widetilde{\sigma}^2}\sum_{i=2}^{n}(Y_i - \widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta}X_i)^2 \\
&= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\widetilde{\sigma}^2) - \frac{n-1}{2}
\end{aligned}
$$

となる。

したがって，尤度比検定統計量

$$-2\log\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})} = (n-1)\log\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}^2}$$

は，n が大きくなると，$\chi^2(1)$ 分布に近づく。

12.4　最尤法の例：AR(1) モデル

$y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t,\ \ \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

1. Mean of y_t given $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$

$$\mathrm{E}(y_t|y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots) = \phi y_{t-1}$$

2. Variance of y_t given $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$

$$\mathrm{V}(y_t|y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots) = \sigma^2$$

3. Thus, $y_t|y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots \sim N(0, \sigma^2)$. $\Longrightarrow$ Conditional distribution of y_t given $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$

4. The stationarity condition is: the solution of $\phi(x) = 1 - \phi x = 0$, i.e., $x = 1/\phi$, is greater than one in absolute value, or equivalently, $|\phi| < 1$.

5. Rewriting the AR(1) model,

$$\begin{aligned} y_t &= \phi y_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \phi^2 y_{t-2} + \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} \\ &= \phi^3 y_{t-3} + \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} \\ &\quad \vdots \\ &= \phi^s y_{t-s} + \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \cdots + \phi^{s-1}\epsilon_{t-s+1}. \end{aligned}$$

   As s is large, ϕ^s approaches zero. $\Longrightarrow$ Stationarity condition

6. For stationarity, $y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t$ is rewritten as:

$$y_t = \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \cdots$$

7. Mean of y_t

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(y_t) &= \mathrm{E}(\epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \cdots) \\ &= \mathrm{E}(\epsilon_t) + \phi\mathrm{E}(\epsilon_{t-1}) + \phi^2\mathrm{E}(\epsilon_{t-2}) + \cdots = 0 \end{aligned}$$

8. Variance of y_t

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(y_t) &= \mathrm{V}(\epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \cdots) \\
&= \mathrm{V}(\epsilon_t) + \mathrm{V}(\phi\epsilon_{t-1}) + \mathrm{V}(\phi^2\epsilon_{t-2}) + \cdots \\
&= \sigma^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \cdots) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}$$

9. Thus, $y_t \sim N\Big(0, \dfrac{\sigma^2}{1-\rho^2}\Big)$. $\Longrightarrow$ Unconditional distribution of y_t

10. Estimation of AR(1) model:

    (a) Log-likelihood function

$$\begin{aligned}
\log f(y_T, \cdots, y_1) &= \log f(y_1) + \sum_{t=1}^{T} \log f(y_t|y_{t-1}, \cdots, y_1) \\
&= -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\right) - \frac{1}{\sigma^2/(1-\phi^2)}y_1^2 \\
&\quad -\frac{T-1}{2}\log(2\pi) - \frac{T-1}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \phi y_{t-1})^2
\end{aligned}$$

$$= -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1-\phi^2}\right)$$
$$-\frac{1}{2\sigma^2/(1-\phi^2)}y_1^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \phi y_{t-1})^2$$

Note as follows:

$$f(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(1-\phi^2)}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2/(1-\phi^2)}y_1^2\right)$$
$$f(y_t|y_{t-1},\cdots,y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_t - \phi y_{t-1})^2\right)$$

$$\frac{\partial \log f(y_T,\cdots,y_1)}{\partial\sigma^2} = -\frac{T}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4/(1-\phi^2)}y_1^2 + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \phi y_{t-1})^2 = 0$$

$$\frac{\partial \log f(y_T,\cdots,y_1)}{\partial\phi} = -\frac{\phi}{1-\phi^2} + \frac{\phi}{\sigma^2}y_1^2 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \phi y_{t-1})y_{t-1} = 0$$

The MLE of ϕ and σ^2 satisfies the above two equation.

12.5 最尤法の例：系列相関のもとで回帰式の推定：その 2

$$y_t = X_t\beta + u_t, \qquad u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon, \qquad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Log of distribution function of u_t

$$\begin{aligned}
\log f(u_T, \cdots, u_1) &= \log f(u_1) + \sum_{t=1}^{T} \log f(u_t | u_{t-1}, \cdots, y_1) \\
&= -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\right) - \frac{1}{\sigma^2/(1-\rho^2)}u_1^2 \\
&\quad -\frac{T-1}{2}\log(2\pi) - \frac{T-1}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(u_t - \rho u_{t-1})^2 \\
&= -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1-\rho^2}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2\sigma^2/(1-\rho^2)}u_1^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(u_t - \rho u_{t-1})^2
\end{aligned}$$

Log of distribution function of y_t

$$
\begin{aligned}
&\log f(y_T, \cdots, y_1) \\
&= \log f(y_1) + \sum_{t=1}^{T} \log f(y_t | y_{t-1}, \cdots, y_1) \\
&= -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\right) - \frac{1}{\sigma^2/(1-\rho^2)}(y_1 - X_1\beta)^2 \\
&\quad -\frac{T-1}{2}\log(2\pi) - \frac{T-1}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}\Big((y_t - X_t\beta) - \rho(y_{t-1} - X_{t-1}\beta)\Big)^2 \\
&= -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1-\rho^2}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(y_t^* - X_t^*\beta)^2,
\end{aligned}
$$

where

$$
y_t^* = \begin{cases} \sqrt{1-\rho^2}\, y_t, & \text{for } t = 1, \\ y_t - \rho y_{t-1}, & \text{for } t = 2, 3, \cdots, T, \end{cases} \qquad
X_t^* = \begin{cases} \sqrt{1-\rho^2}\, X_t, & \text{for } t = 1, \\ X_t - \rho X_{t-1}, & \text{for } t = 2, 3, \cdots, T, \end{cases}
$$

$\log f(y_T, \cdots, y_1)$ is maximized with respect to β, ρ and σ^2.

推定例： OLS, AR(1), AR(1)+X

StataSE をクリック

● データの編集

「Data」「Data Editor」を選択

Excel からデータのコピー
　123,456 という形式でなく，123456 のようにコンマのない形式に設定すること。
　方法：「書式」「セル」のところで「表示形式」のタブの「標準」を選択
　データ名は var1，var2，var3，... となるので，出来れば変更

● command の欄にコマンドを入力

例えば，Y=$\alpha+\beta$ X+γ Z で，α，β，γ を推定するとき，
　「reg Y X Z」リターン
とタイプする。　結果は results の欄に出力

Y，X，Z が時系列データのとき，

「gen t=_n」リターン
「tsset t」リターン
として，時系列データを扱っているということを宣言する。　t は他の名前でも構わない。
そして，
「reg Y X Z」リターン
とする。
「dwstat」リターン
とすると，ダービンワトソン比が出力される。

グラフについて：
「scatter Y X」リターン
とすると，横軸 X，縦軸 Y のグラフ。
「line Y X time」リターン
とすると，横軸 time，縦軸 X と Y のグラフ。

● 参考書

筒井淳也、秋吉美都、水落正明、 福田亘孝著
『Stata で計量経済学入門』(2007 年 3 月) ミネルヴァ書房 \2,940

● データ

year	c	yd	pc
1994	269297.8	299582.1	105.7
1995	272869.0	301741.1	105.3
1996	279125.3	301662.8	105.3
1997	285047.4	306738.4	106.5

```
1998 282102.6 308193.9 106.5
1999 283053.2 305195.6 105.7
2000 282803.5 300716.6 105.0
2001 284355.5 292933.3 104.0
2002 283739.0 291459.4 102.5
2003 281953.3 288440.6 101.4
2004 282969.9 289091.9 100.7
2005 285345.3 290003.9 100.0
2006 287422.8 291205.6  99.7
2007 288314.7 291840.0  99.0
2008 286433.3 289222.9  99.2
2009 277219.7 285996.9  96.8
2010 279843.5 287497.8  95.1
2011 277724.5 287188.9  94.4
2012 281142.7 286710.9  93.5
2013 284930.8 287160.0  93.3
2014 288215.2 288533.0  95.2
```

year 年
c 家計最終消費支出 (名目，10 億円)
yd 家計 (個人企業を含む) 国民可処分所得 (名目，10 億円)
pc 家計最終消費支出デフレーター (連鎖方式，2005 暦年＝ 100)

● 出力結果

```
. gen rc=c/(pc/100)

. gen ryd=yd/(pc/100)
```

```
. tsset year
        time variable:  year, 1994 to 2014
                delta:  1 unit

. reg rc ryd

      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        21
-------------+----------------------------------   F(1, 19)        =     48.44
       Model |  3.1037e+09         1  3.1037e+09   Prob > F        =    0.0000
    Residual |  1.2173e+09        19  64070720.9   R-squared       =    0.7183
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.7034
       Total |  4.3210e+09        20   216050040   Root MSE        =    8004.4

------------------------------------------------------------------------------
          rc |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         ryd |   1.539019   .2211245     6.96   0.000       1.0762    2.001838
       _cons |  -168849.9   64618.02    -2.61   0.017      -304097    -33602.8
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  2,    21) =  .3003309

. estat ic

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion
```

```
------------------------------------------------------------------------------
       Model |        Obs  ll(null)  ll(model)      df          AIC         BIC
-------------+----------------------------------------------------------------
           . |         21 -230.7911  -217.4896       2     438.9791    441.0682
------------------------------------------------------------------------------
               Note: N=Obs used in calculating BIC; see [R] BIC note.

. arima rc ryd, ar(1)

(setting optimization to BHHH)
Iteration 0:   log likelihood = -205.64063
Iteration 1:   log likelihood = -202.54564
......
（中略）
......

Iteration 52:  log likelihood = -201.60808
Iteration 53:  log likelihood = -201.60804
Iteration 54:  log likelihood = -201.60804

ARIMA regression

Sample:  1994 - 2014                            Number of obs      =        21
                                                Wald chi2(2)       =    184.31
Log likelihood =  -201.608                      Prob > chi2        =    0.0000

------------------------------------------------------------------------------
             |                 OPG
          rc |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
```

```
-------------+----------------------------------------------------------------
rc           |
         ryd |   .7001715   .2914022     2.40   0.016     .1290336    1.271309
       _cons |   74004.13   88649.07     0.83   0.404    -99744.84    247753.1
-------------+----------------------------------------------------------------
ARMA         |
          ar |
         L1. |   .9754531   .0907858    10.74   0.000     .7975163     1.15339
-------------+----------------------------------------------------------------
      /sigma |   3324.597   740.4229     4.49   0.000     1873.395    4775.799
------------------------------------------------------------------------------
Note: The test of the variance against zero is one sided, and the two-sided
      confidence interval is truncated at zero.
```