Homework (Due: July 12, 2016, AM10:20)

$\boxed{1}$ We consider estimating the following three production functions.

$$\log(Y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \log(K_t) + \alpha_2 \log(L_t) + u_t \tag{1}$$

$$\log(y_t) = \beta_0 + \beta_1 \log(k_t) + u_t \tag{2}$$

$$\log(Y_t) = \gamma_0 + \gamma_1 \log(K_t) + \gamma_2 \log(L_t) + \gamma_3 D_t + \gamma_4 D_t \log(K_t) + \gamma_5 D_t \log(L_t) + u_t \tag{3}$$

The estimation period is 1969 – 1997 (it's too old!). Let Y_t be GDP (10 billion yen, 1992 price), K_t be the net worth (10 billion yen, deflated by the GDP deflator), L_t be the number of employees, D_t be the dummy variable, which is one after 1991 and zero before 1991, y_t be the per capita GDP (10 billion yen, 1992 price, $y_t = Y_t/L_t$), and k_t be the per capita net worth (10 billion yen, deflated by the GDP deflator, $k_t = K_t/L_t$). The error terms $u_1, u_2, \cdots, u_T$ are mutually independently, identically and normally distributed.

The following estimation results are obtained.

$$\log(Y_t) = -\underset{(7.283)}{30.6242} + \underset{(5.054)}{.230042} \log(K_t) + \underset{(8.266)}{2.23565} \log(L_t)$$

$$R^2 = .986684, \quad \overline{R}^2 = .985659, \quad \widehat{\sigma}^2 = .00141869$$

$$\log(y_t) = -\underset{(41.08)}{3.53058} + \underset{(19.62)}{.504043} \log(k_t)$$

$$R^2 = .934448, \quad \overline{R}^2 = .932020, \quad \widehat{\sigma}^2 = .00354801$$

$$\log(Y_t) = -\underset{(3.630)}{34.6168} + \underset{(2.588)}{.204302} \log(K_t) + \underset{(4.155)}{2.48045} \log(L_t)$$
$$-\underset{(1.090)}{54.8287} D_t + \underset{(.4665)}{.243766} D_t \log(K_t) + \underset{(1.134)}{2.84275} D_t \log(L_t)$$

$$R^2 = .987960, \quad \overline{R}^2 = .985342, \quad \widehat{\sigma}^2 = .00145010$$

Note that the values in the parentheses denote the t values, R^2 is the coefficient of determination, $\overline{R}^2$ is the adjusted R^2, and $\widehat{\sigma}^2$ is the variance estimate of regression.

Answer the following questions.

Q1 Test $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Q2 Test whether the production function is homogeneous.

Q3 Test whether the structural change occurred after 1991.

For each question, show the testing procedure in detail.

$\boxed{2}$ 1982〜2004 年の年次データを用いて，パンの需要関数を推定した。『家計調査年報 (平成 16 年)』(総務省統計局) から 1 世帯当たり年間の品目別支出金額，購入数量及び平均価格（全世帯・勤労者世帯）を使う。変数を次のように定義する。

Q_{1t}： t 年 1 年間のパンの購入量 (1g)
Y_t： t 年 1 年間の所得額 (円，2000 年価格)
P_{1t}： t 年のパンの価格 (円/100g，2000 年価格)
P_{2t}： t 年の米の価格 (円/1kg，2000 年価格)

次の需要関数を推定した。

$$\log Q_{1t} = \underset{(2.032)}{5.899} + \underset{(0.156)}{0.644} \log Y_t - \underset{(0.091)}{1.205} \log P_{1t} + \underset{(0.0313)}{0.00756} \log P_{2t} \tag{4}$$

$$R^2 = 0.925 \qquad \overline{R}^2 = 0.913 \qquad \hat{\sigma}^2 = 0.016564^2 \qquad DW = 1.212 \qquad \log L = 63.87$$

ただし，括弧内は標準誤差，R^2 は決定係数，$\overline{R}^2$ は自由度修正済み決定係数，$\hat{\sigma}^2$ は回帰式の誤差項の分散の推定値，DW はダービン・ワトソン比，$\log L$ は対数尤度関数の値をそれぞれ表す。

1993 年以降，実質所得が減少しているので，この時期に経済構造が変化しているかどうかを調べる。次のダミー変数を定義する。

$$d_t = \begin{cases} 0 & t = 1982〜1992 \text{ 年のとき} \\ 1 & t = 1993〜2004 \text{ 年のとき} \end{cases}$$

ダミー変数を含めて，推定し直して次の結果が得られた。

$$\begin{aligned} \log Q_{1t} = &\ \underset{(9.06\ )}{21.2} - \underset{(0.605)}{0.0757} \log Y_t - \underset{(0.625)}{0.777} \log P_{1t} - \underset{(0.447)}{0.973} \log P_{2t} \\ &- \underset{(10.9\ )}{14.0}\ d_t + \underset{(0.763)}{0.601}\ d_t \log Y_t - \underset{(0.636)}{0.401}\ d_t \log P_{1t} + \underset{(0.458)}{1.041}\ d_t \log P_{2t} \end{aligned} \tag{5}$$

$$R^2 = 0.953 \qquad \overline{R}^2 = 0.931 \qquad \hat{\sigma}^2 = 0.014709^2 \qquad DW = 1.671 \qquad \log L = 69.32$$

次に，(4) 式の誤差項に 1 階の自己相関を仮定して最尤法で推定した。

$$\log Q_{1t} = \underset{(2.42)}{6.33} + \underset{(0.181)}{0.613} \log Y_t - \underset{(0.096)}{1.223} \log P_{1t} + \underset{(0.0428)}{0.0263} \log P_{2t} \tag{6}$$

$$R^2 = 0.936 \qquad \overline{R}^2 = 0.922 \qquad \hat{\sigma}^2 = 0.015769^2 \qquad DW = 1.739 \qquad \log L = 65.58$$

$$\hat{\rho} = \underset{(0.211)}{0.402}$$

ただし，$\hat{\rho}$ は誤差項の自己回帰係数の推定値，括弧内の数字は標準誤差を表す。

次の問いに答えなさい。ただし，誤差項は正規分布を仮定する。

Q4 (4) 式の全部の回帰係数が 1993 年以降変化したという仮説を検定しなさい。帰無仮説，検定統計量，用いる分布表等を含めて，検定の方法を具体的に示すこと。有意水準は適当に設定してよい。係数の記号は適当に設定してよい。

Q5 誤差項が 1 階の自己回帰過程 AR(1) に従うかどうかの検定方法はいくつか考えられる。その中の 2 つの方法を説明し，実際に検定しなさい。有意水準は適当に設定してよい。