(2) σ^2 が未知のとき，μ と σ^2 の最尤推定値と最尤推定量をそれぞれ求める。

［解］$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の密度関数は，

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\Bigr)$$

となる。したがって，互いに独立な $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の結合分布は，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu, \sigma^2) &\equiv \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu, \sigma^2) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\Bigr) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\Bigr) \end{aligned}$$

となる。

(1) σ^2 が既知のとき，尤度関数 $l(\mu)$ は，

$$l(\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right)$$

となる。

$l(\mu)$ を最大にする μ と $\log l(\mu)$ を最大にする μ は同じになる。

したがって，対数尤度関数は，

$$\log l(\mu) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

となり，

$$\frac{\mathrm{d}\log l(\mu)}{\mathrm{d}\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$$

となる μ を求める。μ の解を $\widehat{\mu}$ とすると，μ の最尤推定値は，

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \equiv \overline{x}$$

を得る。

さらに，観測値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ をその確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ で置き換えて，μ の最尤推定量は,

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv \overline{X}$$

となる。

$\widehat{\mu}$ の分散を求めるために,

$$\log f(X_i;\mu) = -\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(X_i-\mu)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\log f(X_i;\mu)}{\mathrm{d}\mu} = \frac{1}{\sigma^2}(X_i-\mu)$$

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\log f(X_i;\mu)}{\mathrm{d}\mu}\Big)^2 = \frac{1}{\sigma^4}(X_i-\mu)^2$$

$$\mathrm{E}\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}\log f(X_i;\mu)}{\mathrm{d}\mu}\Big)^2\Big] = \frac{1}{\sigma^4}\mathrm{E}[(X_i-\mu)^2] = \frac{1}{\sigma^2}$$

と計算される。

最尤推定量の性質から，n が大きいとき，

$$\widehat{\mu} \sim N(\mu, \sigma_\mu^2)$$

ただし，

$$\sigma_\mu^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \mathrm{E}\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}\log f(X_i;\mu)}{\mathrm{d}\mu}\Big)^2\Big]} = \frac{\sigma^2}{n}$$

この場合は，n の大きさに関わらず，$\widehat{\mu} \sim N(\mu, \sigma_\mu^2)$ が成り立つ。

(2) σ^2 が未知のとき，μ と σ^2 の尤度関数は，

$$l(\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\Big)$$

となる。

対数尤度関数は,

$$\log l(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

と表される。

μ と σ^2 について，最大化するためには,

$$\frac{\partial \log l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial \log l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$$

の連立方程式を解く。

μ, σ^2 の解を $\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2$ とすると，最尤推定値は,

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \equiv \overline{x}$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\mu}) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$$

となる。

観測値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ をその確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ で置き換えて，μ, σ^2 の最尤推定量は,

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv \overline{X}$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu}) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})$$

となる。

σ^2 の最尤推定量 $\widehat{\sigma}^2$ は，σ^2 の不偏推定量 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ とは異なることに注意。

$\theta = (\mu, \sigma^2)'$ とする。n が大きいとき，

$$\widehat{\theta} \sim N(\theta, \Sigma_\theta)$$

ただし，

$$\Sigma_\theta = -\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\Big[\frac{\partial^2 \log f(X_i;\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\Big]\Big)^{-1}$$

$$\log f(X_i;\theta) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(X_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \log f(X_i;\theta)}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \log f(X_i;\theta)}{\partial\mu} \\ \dfrac{\partial \log f(X_i;\theta)}{\partial\sigma^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma^2}(X_i-\mu) \\ -\dfrac{1}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}(X_i-\mu)^2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \log f(X_i;\theta)}{\partial\theta\partial\theta'} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \log f(X_i;\theta)}{\partial\mu^2} & \dfrac{\partial^2 \log f(X_i;\theta)}{\partial\mu\partial\sigma^2} \\ \dfrac{\partial^2 \log f(X_i;\theta)}{\partial\sigma^2\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 \log f(X_i;\theta)}{\partial(\sigma^2)^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sigma^2} & -\dfrac{1}{\sigma^4}(X_i-\mu) \\ -\dfrac{1}{\sigma^4}(X_i-\mu) & \dfrac{1}{2\sigma^4} - \dfrac{1}{\sigma^6}(X_i-\mu)^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Big[\frac{\partial^2 \log f(X_i;\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\Big] \\
&= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sigma^2} & -\dfrac{1}{\sigma^4}\mathrm{E}(X_i-\mu) \\ -\dfrac{1}{\sigma^4}\mathrm{E}(X_i-\mu) & \dfrac{1}{2\sigma^4} - \dfrac{1}{\sigma^6}\mathrm{E}[(X_i-\mu)^2] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\Sigma_\theta &= -\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\Big[\frac{\partial^2 \log f(X_i;\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\Big]\Big)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \dfrac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

まとめると，μ，σ^2 の最尤推定量 $\widehat{\mu} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$，$\widehat{\sigma}^2 = (1/n)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ の分布は，n が大きいとき，

$$
\begin{pmatrix} \widehat{\mu} \\ \widehat{\sigma}^2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \dfrac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}\right)
$$

となる。

例 2：　$X_1, X_n, \cdots, X_n$ は互いに独立で，それぞれパラメータ p を持ったベルヌイ分布に従うものとする。すなわち，X_i の確率関数は,

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x} \qquad\qquad x = 0, 1$$

となる。

このとき尤度関数は,

$$l(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

となり，対数尤度関数は,

$$\begin{aligned}\log l(p) &= \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i;p) \\ &= \log(p)\sum_{i=1}^{n} x_i + \log(1-p)\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\end{aligned}$$

$$= \log(p)\sum_{i=1}^{n} x_i + \log(1-p)(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

となる。

$\log l(p)$ を最大にする p を求める。

$$\frac{\mathrm{d}\log l(p)}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{1-p}(n - \sum_{i=1}^{n} x_i) = 0$$

したがって，p について解くと，p の最尤推定値 $\widehat{p}$ は，

$$\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

となる。

さらに，x_i を X_i で置き換えて，p の最尤推定量 $\widehat{p}$ は，

$$\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

となる。

$\widehat{p}$ の分布を求める。

$$\log f(X_i; p) = X_i \log(p) + (1 - X_i) \log(1 - p)$$

$$\frac{\mathrm{d} \log f(X_i; p)}{\mathrm{d}p} = \frac{X_i}{p} - \frac{1 - X_i}{1 - p} = \frac{X_i - p}{p(1 - p)}$$

$$\mathrm{E}\Big[\Big(\frac{\mathrm{d} \log f(X_i; p)}{\mathrm{d}p}\Big)^2\Big] = \frac{\mathrm{E}[(X_i - p)^2]}{p^2(1 - p)^2}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(X_i - p)^2] &= \sum_{x_i=0}^{1} (x_i - p)^2 f(x_i; p) \\
&= \sum_{x_i=0}^{1} (x_i - p)^2 p^{x_i} (1 - p)^{1-x_i} \\
&= p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p = p(1 - p)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\log f(X_i;p)}{\mathrm{d}p}\right)^2\right]} = \frac{p(1-p)}{n}$$

したがって,

$$\widehat{p} \sim N(p,\ \frac{p(1-p)}{n})$$

を得る。

例 3：　$X_1, X_n, \cdots, X_n$ は互いに独立で，それぞれパラメータ λ を持ったポアソン分布に従うものとする。すなわち，X_i の確率関数は,

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad\qquad x = 0, 1, 2, \cdots$$

となる。

このとき尤度関数は,

$$l(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$$

となり，対数尤度関数は,

$$\begin{aligned}\log l(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i; \lambda) \\ &= \log(\lambda) \sum_{i=1}^{n} x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i!)\end{aligned}$$

となる。

$\log l(\lambda)$ を最大にする p を求める。

$$\frac{\mathrm{d} \log l(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0$$

したがって，λ について解くと，λ の最尤推定値 $\widehat{\lambda}$ は,

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

となる。

さらに，x_i を X_i で置き換えて，λ の最尤推定量 $\widehat{\lambda}$ は，

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

となる。

$\widehat{\lambda}$ の分布を求める。

$$\log f(X_i;\lambda) = X_i \log(\lambda) - \lambda - \log(X_i!)$$

$$\frac{\mathrm{d}\log f(X_i;\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{X_i}{\lambda} - 1$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\log f(X_i;\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\frac{X_i}{\lambda^2}$$

$$\mathrm{E}\Big(\frac{\mathrm{d}^2\log f(X_i;\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^2}\Big) = \frac{\mathrm{E}(X_i)}{\lambda^2}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_i) &= \sum_{x=0}^{\infty} x f(x;\lambda) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{x-1} e^{-\lambda}}{(x-1)!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{d}^2 \log f(X_i;\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^2}\right)} = \frac{\lambda}{n}
$$

したがって,

$$\widehat{\lambda} \sim N(\lambda,\ \frac{\lambda}{n})$$

を得る。

例 4： $X_1, X_n, \cdots, X_n$ は互いに独立で，それぞれパラメータ λ を持った指数分布に従うものとする。すなわち，X_i の密度関数は,

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad\qquad x > 0$$

となる。

このとき尤度関数は,

$$l(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i}$$

となり，対数尤度関数は,

$$\begin{aligned}\log l(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i; \lambda) \\ &= n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\end{aligned}$$

となる。

$\log l(\lambda)$ を最大にする p を求める。

$$\frac{\mathrm{d} \log l(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

したがって，λ について解くと，λ の最尤推定値 $\widehat{\lambda}$ は,

$$\widehat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

となる。

さらに，x_i を X_i で置き換えて，λ の最尤推定量 $\widehat{\lambda}$ は，

$$\widehat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

となる。

$\widehat{\lambda}$ の分布を求める。

$$\log f(X_i;\lambda) = \log\lambda - \lambda X_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\log f(X_i;\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\lambda} - X_i$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\log f(X_i;\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2}$$

$$-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\Big(\frac{\mathrm{d}^2\log f(X_i;\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^2}\Big)} = \frac{\lambda^2}{n}$$

したがって，

$$\widehat{\lambda} \sim N(\lambda,\ \frac{\lambda^2}{n})$$

を得る。

6.2.1　変数変換

確率変数 X の密度関数を $f(x)$，分布関数を $F(x) \equiv \mathrm{P}(X < x)$ とする。$Y = aX + b$ とするとき，Y の密度関数 $g(y)$ を求める。

Y の分布関数を $G(y)$ として，次のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
G(y) &= \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(aX + b < y) \\
&= \begin{cases} \mathrm{P}\left(X < \dfrac{y-b}{a}\right), & a > 0 \text{ のとき} \\ \mathrm{P}\left(X > \dfrac{y-b}{a}\right), & a < 0 \text{ のとき} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathrm{P}\left(X < \dfrac{y-b}{a}\right), & a > 0 \text{ のとき} \\ 1 - \mathrm{P}\left(X < \dfrac{y-b}{a}\right), & a < 0 \text{ のとき} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases} F\Big(\dfrac{y-b}{a}\Big), & a > 0 \text{ のとき} \\ 1 - F\Big(\dfrac{y-b}{a}\Big), & a < 0 \text{ のとき} \end{cases}
$$

分布関数と密度関数との関係は，

$$
\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \qquad \frac{\mathrm{d}G(x)}{\mathrm{d}x} = g(x)
$$

であるので，Y の密度関数は，

$$
\begin{aligned}
g(y) &= \frac{\mathrm{d}G(y)}{\mathrm{d}y} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{a} f\Big(\dfrac{y-b}{a}\Big), & a > 0 \text{ のとき} \\ -\dfrac{1}{a} f\Big(\dfrac{y-b}{a}\Big), & a < 0 \text{ のとき} \end{cases} \\
&= \Big|\frac{1}{a}\Big| f\Big(\frac{y-b}{a}\Big)
\end{aligned}
$$

と表される。

一般に，確率変数 X の密度関数を $f(x)$ とする。単調変換 $X = h(Y)$ とするとき，Y の密度関数 $g(y)$ は,

$$g(y) = |h'(y)|f(h(y))$$

となる。

6.2.2　回帰分析への応用

回帰モデル

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は互いに独立で，すべての i について $u_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ を仮定する。

u_i の密度関数は,

$$f(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}u_i^2\Bigr)$$

となる。

Y_i の密度関数 $g(Y_i)$ は,

$$g(Y_i) = |h'(Y_i)| f(h(Y_i))$$

によって求められる。

この場合，$h(Y_i) = Y_i - \alpha - \beta X_i$ なので，$h'(Y_i) = 1$ となる。

したがって，Y_i の密度関数は,

$$\begin{aligned} g(Y_i) &= |h'(Y_i)| f(h(Y_i)) \\ &= f(h(Y_i)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}(Y_i - \alpha - \beta X_i)^2\Bigr) \end{aligned}$$

となる。

$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は互いに独立であれば，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ も互いに独立になるので，Y_1,

$Y_2, \cdots, Y_n$ の結合密度関数は,

$$
\begin{aligned}
g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) &= \prod_{i=1}^{n} g(Y_i) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2\Bigr)
\end{aligned}
$$

となる。これは α, β, σ^2 の関数となっている。

よって，尤度関数は,

$$
l(\alpha, \beta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2\Bigr)
$$

となる。

対数尤度関数は,

$$
\begin{aligned}
\log l(\alpha, \beta, \sigma^2) = &-\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) \\
&-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2
\end{aligned}
$$

となる。

$\log l(\alpha, \beta, \sigma^2)$ を最大にするために，

$$\frac{\partial \log l(\alpha, \beta, \sigma^2)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i) = 0$$
$$\frac{\partial \log l(\alpha, \beta, \sigma^2)}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - \alpha - \beta X_i) = 0$$
$$\frac{\partial \log l(\alpha, \beta, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2 = 0$$

の連立方程式を解く。

上 2 つの式は σ^2 に依存していない。α，β の最尤推定量は最小二乗推定量と同じになる。

すなわち，

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}$$

$$\widehat{\alpha} = \overline{Y} - \widehat{\beta}\overline{X}$$

σ^2 の最尤推定量は，

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}X_i)^2$$

となり，s^2 とは異なる。

$\widehat{\theta} = (\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\sigma}^2)'$，$\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2)'$ とする。n が大きいとき，

$$\widehat{\theta} \sim N(\theta, \Sigma_\theta)$$

ただし，

$$\Sigma_\theta = \Big(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\Big[\Big(\frac{\partial \log g(Y_i;\theta)}{\partial\theta}\Big)\Big(\frac{\partial \log g(Y_i;\theta)}{\partial\theta}\Big)'\Big]\Big)^{-1}$$
$$= -\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\Big[\frac{\partial^2 \log g(Y_i;\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\Big]\Big)^{-1}$$

Y_i の密度関数 $g(Y_i;\theta)$ の対数は,

$$\log g(Y_i;\theta) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(\sigma^2) \\ -\frac{1}{2\sigma^2}(Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

となる。

$$\frac{\partial \log g(Y_i;\theta)}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \log g(Y_i;\theta)}{\partial\alpha} \\ \dfrac{\partial \log g(Y_i;\theta)}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial \log g(Y_i;\theta)}{\partial\sigma^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma^2}(Y_i - \alpha - \beta X_i) \\ \dfrac{1}{\sigma^2}X_i(Y_i - \alpha - \beta X_i) \\ -\dfrac{1}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}(Y_i - \alpha - \beta X_i)^2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \log g(Y_i;\theta)}{\partial\theta\partial\theta'} \\
&= \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial^2 \log g(Y_i;\theta)}{\partial\alpha^2} & \dfrac{\partial^2 \log g(Y_i;\theta)}{\partial\alpha\partial\beta} & \dfrac{\partial^2 \log g(Y_i;\theta)}{\partial\alpha\partial\sigma^2} \\
\dfrac{\partial^2 \log g(Y_i;\theta)}{\partial\beta\partial\alpha} & \dfrac{\partial^2 \log g(Y_i;\theta)}{\partial\beta^2} & \dfrac{\partial^2 \log g(Y_i;\theta)}{\partial\beta\partial\sigma^2} \\
\dfrac{\partial^2 \log g(Y_i;\theta)}{\partial\sigma^2\partial\alpha} & \dfrac{\partial^2 \log g(Y_i;\theta)}{\partial\sigma^2\partial\beta} & \dfrac{\partial^2 \log g(Y_i;\theta)}{\partial(\sigma^2)^2}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
-\dfrac{1}{\sigma^2} & -\dfrac{X_i}{\sigma^2} & -\dfrac{u_i}{\sigma^4} \\
-\dfrac{X_i}{\sigma^2} & -\dfrac{X_i^2}{\sigma^2} & -\dfrac{X_i u_i}{\sigma^4} \\
-\dfrac{u_i}{\sigma^4} & -\dfrac{X_i u_i}{\sigma^4} & \dfrac{1}{2\sigma^4} - \dfrac{u_i^2}{\sigma^6}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ただし，$u_i = Y_i - \alpha - \beta X_i$

期待値をとると，

$$\mathrm{E}\Big(\frac{\partial^2 \log g(Y_i;\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\Big) = \mathrm{E}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} & -\frac{X_i}{\sigma^2} & -\frac{u_i}{\sigma^4} \\ -\frac{X_i}{\sigma^2} & -\frac{X_i^2}{\sigma^2} & -\frac{X_i u_i}{\sigma^4} \\ -\frac{u_i}{\sigma^4} & -\frac{X_i u_i}{\sigma^4} & \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{u_i^2}{\sigma^6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} & -\frac{X_i}{\sigma^2} & 0 \\ -\frac{X_i}{\sigma^2} & -\frac{X_i^2}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

となる。

$$\Sigma_\theta = -\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\Big[\frac{\partial^2 \log g(Y_i;\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\Big]\Big)^{-1}$$

$$
= \begin{pmatrix} \dfrac{n}{\sigma^2} & \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sigma^2} & 0 \\ \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sigma^2} & \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}^{-1}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sigma^2 \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}
$$

したがって，

$$
\begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \right)
$$

となる。

$\longrightarrow$ 最小二乗推定量の分布と同じ。

6.2.3 誤差項に系列相関がある場合

回帰モデル

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i \qquad\qquad i = 2, 3, \cdots, n$$

$\epsilon_2, \epsilon_3, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立で，すべての i について $\epsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ を仮定する。

u_i を消去すると，

$$(Y_i - \alpha - \beta X_i) = \rho(Y_{i-1} - \alpha - \beta X_{i-1}) + \epsilon_i$$

または

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = \alpha(1 - \rho) + \beta(X_i - \rho X_{i-1}) + \epsilon_i$$

と書き直すことが出来る。

$\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, \rho)$ とする。

$$\log f(Y_i;\theta) = -\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) \\ -\frac{1}{2\sigma^2}\Big((Y_i - \rho Y_{i-1}) - \alpha(1-\rho) - \beta(X_i - \rho X_{i-1})\Big)^2$$

尤度関数は,

$$\log l(\theta) = \sum_{i=2}^{n} \log f(Y_i;\theta) = -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\sigma^2) \\ -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i - \rho Y_{i-1}) - \alpha(1-\rho) - \beta(X_i - \rho X_{i-1})\Big)^2$$

となる。

尤度関数をそれぞれ α，β，σ^2，ρ について微分し，ゼロとおく。

$$\frac{\partial \log l(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{1-\rho}{\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i - \rho Y_{i-1}) \\ -\alpha(1-\rho) - \beta(X_i - \rho X_{i-1})\Big) = 0$$

$$\frac{\partial \log l(\theta)}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}(X_i - \rho X_{i-1})\Big((Y_i - \rho Y_{i-1}) \\ -\alpha(1-\rho) - \beta(X_i - \rho X_{i-1})\Big) = 0$$

$$\frac{\partial \log l(\theta)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n-1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i - \rho Y_{i-1}) \\ -\alpha(1-\rho) - \beta(X_i - \rho X_{i-1})\Big)^2 = 0$$

$$\frac{\partial \log l(\theta)}{\partial \rho} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}(Y_{i-1} - \alpha - \beta X_{i-1})\Big((Y_i - \alpha - \beta X_i) \\ -\rho(Y_{i-1} - \alpha - \beta X_{i-1})\Big) = 0$$

$(Y_i - \alpha - \beta X_i) - \rho(Y_{i-1} - \alpha - \beta X_{i-1})$ は

$(Y_i - \rho Y_{i-1}) - \alpha(1-\rho) - \beta(X_i - \rho X_{i-1})$ を書き直したもの。

4 つの連立方程式を解いて，最尤推定量 $\widehat{\alpha}$，$\widehat{\beta}$，$\widehat{\sigma}^2$，$\widehat{\rho}$ が得られる。

$\longrightarrow$ 下記のように収束計算によって求める。

(i) 初期段階では，$\widehat{\rho} = 0$ とする。

(ii) $X_i^* = X_i - \widehat{\rho} X_{i-1}$

$Y_i^* = Y_i - \widehat{\rho} Y_{i-1}$

(iii) $$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & \sum_{i=2}^n X_i^* \\ \sum_{i=2}^n X_i^* & \sum_{i=2}^n X_i^{*2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^n Y_i^* \\ \sum_{i=2}^n X_i^* Y_i^* \end{pmatrix}$$

(iv) $$\widehat{\alpha} = \frac{\widetilde{\alpha}}{1 - \widehat{\rho}}$$

(v) $\widehat{u}_i = Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} X_i$

(vi) $$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n (\widehat{u}_i - \widehat{\rho}\widehat{u}_{i-1})^2$$

(vii) $$\widehat{\rho} = \frac{\sum_{i=2}^n \widehat{u}_i \widehat{u}_{i-1}}{\sum_{i=2}^n \widehat{u}_{i-1}^2}$$

(viii) ステップ (ii) ～ (vii) を，収束するまで繰り返し計算する。

6.3 尤度比検定

n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で，同じ確率分布 $f(x) \equiv f(x;\theta)$ とする。

尤度関数は,

$$l(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

となる。

θ の制約つき最尤推定量を $\widetilde{\theta}$，制約無し最尤推定量を $\widehat{\theta}$ とする。

制約の数を G 個とする。

$\dfrac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})}$ を尤度比と呼ぶ

検定方法 1：　尤度比がある値より小さいときに，帰無仮説を棄却する。すなわち，

$$\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})} < c$$

となるときに，帰無仮説を棄却する。この場合，c を次のようにして求める必要がある。

$$\int \cdots \int \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \widetilde{\theta}) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \alpha$$

ただし，α は有意水準（帰無仮説が正しいときに，帰無仮説を棄却する確率）を表す。

検定方法 2（大標本検定）：　または，$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$$-2\log\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})} \longrightarrow \chi^2(G)$$

となる。

この検定を尤度比検定と呼ぶ。

例 1： 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を用いて，σ^2 が既知のとき，帰無仮説 H_0：$\mu = \mu_0$，H_1：$\mu \neq \mu_0$ の尤度比検定を行う。

σ^2 が既知のとき，尤度関数 $l(\mu)$ は,

$$l(\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\right)$$

となる。

$l(\mu)$ を最大にする μ と $\log l(\mu)$ を最大にする μ は同じになる。

μ の最尤推定量は,

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \equiv \overline{X}$$

となる。

尤度比検定統計量は,

$$\frac{l(\mu_0)}{l(\overline{X})} = \frac{\exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right)}{\exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2/n}(\overline{X}-\mu_0)^2\right) < c$$

となる c を求める。

H_0 が正しいときに, $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)/\sigma \sim N(0,1)$ となるので,

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}\right) = \alpha$$

すなわち,

$$P\left(\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2/n}(\overline{X}-\mu_0)^2\right) < \exp\left(-\frac{1}{2}z_{\alpha/2}^2\right)\right) = \alpha$$

と変形できる。したがって,

$$c = \exp\left(-\frac{1}{2} z_{\alpha/2}^2\right)$$

とすればよい。

例 2：　$X_1, X_n, \cdots, X_n$ は互いに独立で，それぞれパラメータ p を持ったベルヌイ分布に従うものとする。すなわち，X_i の確率関数は,

$$f(x; p) = p^x (1-p)^{1-x} \qquad x = 0, 1$$

となる。

このとき尤度関数は,

$$l(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$

となる。

p の最尤推定量 $\widehat{p}$ は,

$$\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

である。

次の仮説検定を考える。

$$H_0 : \ p = p_0 \qquad\qquad H_1 : \ p \neq p_0$$

→ 制約数は 1 つ。($G = 1$)

尤度比は,

$$\frac{l(p_0)}{l(\widehat{p})} = \frac{\prod_{i=1}^{n} p_0^{X_i}(1-p_0)^{1-X_i}}{\prod_{i=1}^{n} \widehat{p}^{X_i}(1-\widehat{p})^{1-X_i}}$$

したがって，$n \longrightarrow \infty$ のとき,

$$-2\log\frac{l(p_0)}{l(\widehat{p})} = -2\log\frac{p_0}{\widehat{p}}\sum_{i=1}^{n} X_i - 2\log\frac{1-p_0}{1-\widehat{p}}\sum_{i=1}^{n}(1-X_i)$$

$\longrightarrow \chi^2(1)$

$\chi^2(1)$ 分布の上側 100 α% 点を $\chi^2_\alpha(1)$ とするとき,

$$-2\log\frac{l(p_0)}{l(\widehat{p})} > \chi^2_\alpha(1)$$

のとき，帰無仮説 H_0 : $p = p_0$ を棄却する。

例 3 : 　回帰モデル

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

$$u_i \sim N(0,\sigma^2) \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

について，$\beta_1,\cdots,\beta_k$ に関する仮説の尤度比検定を行う。

例えば,

$$H_0:\ \beta_1 = 0$$

$$H_0:\ \beta_1 + \beta_2 = 1$$

$$H_0:\ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

などのような仮説検定

$\theta = (\beta_1, \cdots, \beta_k, \sigma^2)$ とする。

尤度関数は,

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f(Y_i; \theta) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_1 X_{1i} - \cdots - \beta_k X_{ki})^2\Big) \end{aligned}$$

となる。

H_0 の制約つき最尤推定量を $\widetilde{\theta} = (\widetilde{\beta}_1, \cdots, \widetilde{\beta}_k, \widetilde{\sigma}^2)$ とする。この仮設に含まれる制約数を G とする。

制約なし最尤推定量を $\widehat{\theta} = (\widehat{\beta}_1, \cdots, \widehat{\beta}_k, \widehat{\sigma}^2)$ とする。

尤度比

$$\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})} = \frac{(2\pi\widetilde{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(-\frac{1}{2\widetilde{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widetilde{\beta}_1 X_{1i} - \cdots - \widetilde{\beta}_k X_{ki})^2\Big)}{(2\pi\widehat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(-\frac{1}{2\widehat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\beta}_1 X_{1i} - \cdots - \widehat{\beta}_k X_{ki})^2\Big)}$$

$$= \frac{(\widetilde{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(-\frac{n-G}{2}\Big)}{(\widehat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(-\frac{n-k}{2}\Big)}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{n-G}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{u}_i^2}{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2}\right)^{-n/2} \exp\Big(-\frac{k-G}{2}\Big)$$

$$= \exp\Big(-\frac{k-G}{2}\Big)\left(\frac{n-k}{n-G}\right)^{-n/2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\widetilde{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2}\right)^{-n/2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(-\frac{k-G}{2}\right)\left(\frac{n-k}{n-G}\right)^{-n/2} \\
&\quad \times \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{u}_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2}\right)^{-n/2} \\
&= \exp\left(-\frac{k-G}{2}\right)\left(\frac{n-k}{n-G}\right)^{-n/2} \\
&\quad \times \left(1 + \frac{G}{n-k}\frac{(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{u}_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2)/G}{\sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2/(n-k)}\right)^{-n/2} \\
&< c
\end{aligned}
$$

のとき仮説を棄却する。

$$
\frac{(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{u}_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2)/G}{\sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2/(n-k)} \sim F(G, n-k)
$$

を利用すると c が求まる。

ただし，途中で以下を利用

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-G}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widetilde{\beta}_1 X_{1i} - \cdots - \widetilde{\beta}_k X_{ki})^2 \\ &= \frac{1}{n-G}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{u}_i^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\beta}_1 X_{1i} - \cdots - \widehat{\beta}_k X_{ki})^2 \\ &= \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}\widehat{u}_i^2\end{aligned}$$

近似的には，

$$-2\log\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})} = -2\log\frac{(\widetilde{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\Bigl(-\dfrac{n-G}{2}\Bigr)}{(\widehat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\Bigl(-\dfrac{n-k}{2}\Bigr)}$$

$$
\begin{aligned}
&= n\log\Big(\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}^2}\Big) + (k - G) \\
&\longrightarrow \chi^2(G)
\end{aligned}
$$

例 4： 回帰モデル

$$
\begin{aligned}
&Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \\
&u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i \\
&\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \qquad i = 2, 3, \cdots, n
\end{aligned}
$$

について，H_0： $\rho = 0$，H_1： $\rho \neq 0$ の尤度比検定を行う。

$\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, \rho)$ とする。対数尤度関数は，

$$
\log l(\theta) = \sum_{i=2}^{n} \log f(Y_i; \theta) = -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\sigma^2)
$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i-\rho Y_{i-1})-\alpha(1-\rho)-\beta(X_i-\rho X_{i-1})\Big)^2$$

となる。

対数尤度関数をそれぞれ α，β，σ^2，ρ について微分し，ゼロとおく。4 本の連立方程式を解いて，制約なし最尤推定量 $\widehat{\theta}=(\widehat{\alpha}，\widehat{\beta}，\widehat{\sigma}^2，\widehat{\rho})$ が得られる。

$\rho=0$ と制約をおく。$\theta=(\alpha,\beta,\sigma^2,0)$ とする。対数尤度関数は,

$$\log l(\theta)=\sum_{i=2}^{n}\log f(Y_i;\theta)=-\frac{n-1}{2}\log(2\pi)-\frac{n-1}{2}\log(\sigma^2)$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}(Y_i-\alpha-\beta X_i)^2$$

となる。

上記の対数尤度関数をそれぞれ α，β，σ^2 について微分し，ゼロとおく。3 本の連立方程式を解いて，$\rho=0$ の制約付き最尤推定量 $\widetilde{\theta}=(\widetilde{\alpha}，\widetilde{\beta}，\widetilde{\sigma}^2，0)$ が得られる。

すなわち,

$$\frac{\displaystyle\max_{\alpha,\beta,\sigma^2} l(\alpha,\beta,\sigma^2,0)}{\displaystyle\max_{\alpha,\beta,\sigma^2,\rho} l(\alpha,\beta,\sigma^2,\rho)} = \frac{l(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\sigma}^2,0)}{l(\widehat{\alpha},\widehat{\beta},\widehat{\sigma}^2,\widehat{\rho})} = \frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})}$$

$\log l(\widehat{\theta})$ は, $\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i - \widehat{\rho}Y_{i-1}) - \widehat{\alpha}(1-\widehat{\rho}) - \widehat{\beta}(X_i - \widehat{\rho}X_{i-1})\Big)^2$ に注意して,

$$\begin{aligned}\log l(\widehat{\theta}) &= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\widehat{\sigma}^2)\\ &\quad -\frac{1}{2\widehat{\sigma}^2}\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i - \widehat{\rho}Y_{i-1}) - \widehat{\alpha}(1-\widehat{\rho}) - \widehat{\beta}(X_i - \widehat{\rho}X_{i-1})\Big)^2\\ &= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\widehat{\sigma}^2) - \frac{n-1}{2}\end{aligned}$$

となる。

同様に, $\log l(\widetilde{\theta})$ は, $\widetilde{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=2}^{n}(Y_i - \widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta}X_i)^2$ に注意して,

$$\log l(\widetilde{\theta}) = -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\widetilde{\sigma}^2)$$

$$
-\frac{1}{2\widetilde{\sigma}^2}\sum_{i=2}^{n}(Y_i-\widetilde{\alpha}-\widetilde{\beta}X_i)^2
$$

$$
=-\frac{n-1}{2}\log(2\pi)-\frac{n-1}{2}\log(\widetilde{\sigma}^2)-\frac{n-1}{2}
$$

となる。

したがって，尤度比検定統計量

$$
-2\log\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\widehat{\theta})}=(n-1)\log\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}^2}
$$

は，n が大きくなると，$\chi^2(1)$ 分布に近づく。