第6章　統計学の回帰分析への応用

6.1　確率的モデル：単回帰モデル

再び，話を簡単にするために単回帰モデルを考えることにしよう。すなわち，$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$ のように n 組のデータがあり，X_i と Y_i との間に線型関係を想定する。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i,$$

最小二乗法を用いて，データに直線のあてはめを行った。その結果，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{Y}_i$ を求めるための公式は，

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2},$$
$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X},$$

であった。

$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$ とするとき，Y_i，$\hat{Y}_i$，$\hat{u}_i$，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の関係は以下の通りである。

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i + \hat{u}_i,$$

残差 $\hat{u}_i$ が必ず含まれることから，回帰モデルを

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

として誤差項 (または，攪乱項) u_i を含め，それを確率変数として考える。u_i は平均 0，分散 σ^2 の正規分布が仮定されることが多い。ある確率密度分布（ここでは正規分布）があって，その分布に従い，データ（ここでは Y_i）が生成されるモデルのことを確率的モデルと呼ぶ。

Y_i： 被説明変数，従属変数

X_i： 説明変数，独立変数

α, β： 未知母数 (未知パラメータ)

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$: 推定量 (特に，最小二乗推定量)，時には，推定値（最小二乗推定値）

1. 残差 $\hat{u}_i$ は u_i の実現値としてみなすことができる。
2. $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の性質を統計学的に考察可能となる。

6.2　回帰モデルの仮定

回帰モデル

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

の仮定：

1. X_i は確率変数でないと仮定する (固定された値)。
2. すべての i について，$\mathrm{E}(u_i) = 0$ とする。
3. すべての i について，$\mathrm{V}(u_i) = \sigma^2$ とする。($\mathrm{V}(u_i) = \mathrm{E}(u_i^2) = \sigma^2$ に注意)
4. すべての $i \neq j$ について，$\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = 0$ とする。($\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = \mathrm{E}(u_i u_j) = 0$ に注意)
5. すべての i について，$u_i \sim N(0, \sigma^2)$ とする。
6. $n \longrightarrow \infty$ のとき，$\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 \longrightarrow \infty$ とする。

攪乱項 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ はそれぞれ独立に平均ゼロ，分散 σ^2 の正規分布する。

再度，まとめて，回帰モデル：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i, \quad u_i \sim N(0, \sigma^2),$$

ただし，

Y_i： 被説明変数，従属変数

X_i： 説明変数，独立変数

α, β, σ^2： 未知母数 (未知パラメータ)

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$： 推定量 (特に，最小二乗推定量)

特に，回帰直線は，

$$E(Y_i) = \alpha + \beta X_i$$

として解釈される。

6.2.1 誤差項 (攪乱項) の経済学的意味

1. 経済理論自身が不完全： X 以外にも他の説明変数が必要であるにもかかわらず，それを誤って除いている可能性がある。
2. モデルの定式化が不完全 : Y と X との間の線形関係が誤りかもしれない。
3. 理論モデルとデータとの対応： 理論モデルで考えられる変数と実際に用いたデータが適当でないかもしれない。例： 所得のデータについては国民総生産，国民所得，可処分所得，労働所得 ⋯，金利では公定歩合，国債利回り，定期預金金利，全国銀行平均約定金利 ⋯
4. 測定上の誤差 : 経済データは一般的に推計されているため完全ではない。誤差を含む。

6.3 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の統計的性質

準備：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

$$\overline{Y} = \alpha + \beta \overline{X} + \overline{u},$$

ただし，

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i,$$

とする。辺々を引いて，

$$Y_i - \overline{Y} = \beta(X_i - \overline{X}) + (u_i - \overline{u}),$$

を得る。

6.3.1　$\hat{\beta}$ について

β の最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ に代入すると，

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})\big(\beta(X_i - \overline{X}) + (u_i - \overline{u})\big)}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})\big(\beta(X_i - \overline{X})\big)}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(u_i - \overline{u})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})u_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}\end{aligned}$$

である。途中の計算で，$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})\overline{u} = 0$ に注意せよ。

よって，まとめると，

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})u_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \beta + \sum_{i=1}^{n}\omega_i u_i,$$

となる。ただし，$\omega_i = \dfrac{(X_i - \overline{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$ とする。

6.3.2　$\hat{\alpha}$ について

α の最小二乗推定量 $\hat{\alpha}$ については，

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} = \alpha - (\hat{\beta} - \beta)\overline{X} + \overline{u}$$

ただし，$\overline{u} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$ である。$\overline{Y} = \alpha + \beta\overline{X} + \overline{u}$ を途中で使う。

6.3.3　$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の平均

$\hat{\beta}$ は次のように書き換えられた。

$$\hat{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i,$$

の両辺に期待値をとると，

$$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \mathrm{E}(\beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i) = \beta + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(\omega_i u_i) = \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathrm{E}(u_i) = \beta,$$

となり，$\hat{\beta}$ は β の不偏推定量であると言える。
$\hat{\alpha}$ については，

$$\hat{\alpha} = \alpha - (\hat{\beta} - \beta)\overline{X} + \overline{u}$$

を利用して，辺々に期待値をとると，

$$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \alpha - \mathrm{E}(\hat{\beta} - \beta)\overline{X} + \mathrm{E}(\overline{u}) = \alpha$$

となる。$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta$ なので，$\mathrm{E}(\hat{\beta} - \beta) = 0$ に注意。また，$\mathrm{E}(\overline{u})$ の計算は以下のとおり。

$$\mathrm{E}(\overline{u}) = \mathrm{E}(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(u_i) = 0$$

$\hat{\alpha}$ は α の不偏推定量であると言える。

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分散

$\hat{\beta}$ の分散について，$\hat{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i$ を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\hat{\beta}) &= \mathrm{V}(\beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i) = \mathrm{V}(\sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \mathrm{V}(u_i^2) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}\end{aligned}$$

誤差項 (または，攪乱項) の仮定より，

$$\mathrm{V}(u_i) = \sigma^2,$$

を用いる。

最後の行は，$\omega_i = \dfrac{X_i - \overline{X}}{\sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2}$ に注意して，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \omega_i^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\left(\sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\left(\sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}\end{aligned}$$

を用いる。$\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2$ に注意。

よって，$\hat{\beta}$ の平均は β，分散は $\dfrac{\sigma^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$ となることが示された。

$\hat{\alpha}$ の分散について，$\hat{\alpha} = \alpha - (\hat{\beta} - \beta)\overline{X} + \overline{u}$ を利用すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\hat{\alpha}) &= \mathrm{E}(\hat{\alpha} - \alpha)^2 = \mathrm{E}(-(\hat{\beta} - \beta)\overline{X} + \overline{u})^2 \\ &= \overline{X}^2 \mathrm{E}(\hat{\beta} - \beta)^2 - 2\overline{X}\mathrm{E}((\hat{\beta} - \beta)\overline{u}) + \mathrm{E}(\overline{u}^2) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} + \frac{1}{n} \right) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}\end{aligned}$$

途中で，以下の計算が使われる。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}((\hat{\beta} - \beta)\overline{u}) &= \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})u_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \right) \\ &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})u_i \sum_{j=1}^n u_j \right) \\ &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - \overline{X})\mathrm{E}(u_i u_j) \\ &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} \sigma^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}) = 0\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}) = 0$ であることに注意。

$$\mathrm{E}(\overline{u}^2) = \mathrm{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i)^2 = \frac{1}{n^2}\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i u_j) = \frac{1}{n^2}\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} u_i^2)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(u_i^2) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

よって，$\hat{\alpha}$ の平均は α，分散は $\dfrac{\sigma^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$ となることが示された。

$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の共分散について，$\hat{\alpha} = \alpha - (\hat{\beta} - \beta)\overline{X} + \overline{u}$ を利用すると，

$$\mathrm{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \mathrm{E}((\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)) = \mathrm{E}((-(\hat{\beta} - \beta)\overline{X} + \overline{u})(\hat{\beta} - \beta))$$
$$= -\mathrm{E}((\hat{\beta} - \beta)^2)\overline{X} + \mathrm{E}(\overline{u}(\hat{\beta} - \beta)) = -\mathrm{E}((\hat{\beta} - \beta)^2)\overline{X}$$
$$= -\frac{\sigma^2\overline{X}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

となる。

数値例：

i	X_i	Y_i	X_i^2	X_iY_i
1	5	4	25	20
2	1	1	1	1
3	3	1	9	3
4	2	3	4	6
5	4	4	16	16
合計	$\sum X_i$	$\sum Y_i$	$\sum X_i^2$	$\sum X_iY_i$
	15	13	55	46
平均	$\overline{X}$	$\overline{Y}$		
	3	2.6		

$$\mathrm{V}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\overline{X}^2} = \frac{\sigma^2}{55 - 5\times 3^2} = \frac{\sigma^2}{10} = 0.1\sigma^2$$

$$\mathrm{V}(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sigma^2 55}{5(55 - 5 \times 3^2)} = \frac{55\sigma^2}{50} = 1.1\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -\frac{\sigma^2 \overline{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} = -\frac{\sigma^2 \overline{X}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2} = -\frac{3\sigma^2}{55 - 5 \times 3^2} = -0.3\sigma^2$$

注意：　最小二乗法を復習すると，まず，次のような関数 $S(\alpha, \beta)$ を定義する。

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

$S(\alpha, \beta)$ の最小化によって，

$$\frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial S(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$$

を満たす α, β が $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ となる。

すなわち，$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は，

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0$$

を満たす。

さらに，

$$\sum_{i=1}^n Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i, \qquad \sum_{i=1}^n X_i Y_i = \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

行列表示によって，

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix},$$

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ について，まとめて，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & -\sum_{i=1}^n X_i \\ -\sum_{i=1}^n X_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

逆行列の部分と分散，共分散とは以下のような関係がある。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathrm{V}(\hat{\alpha}) & \mathrm{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) & \mathrm{V}(\hat{\beta}) \end{pmatrix} &= \sigma^2 \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{\sigma^2}{n\sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & -\sum_{i=1}^n X_i \\ -\sum_{i=1}^n X_i & n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} & -\dfrac{\sigma^2\overline{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} \\ -\dfrac{\sigma^2\overline{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} & \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分布 (σ^2 が既知の場合)

1. $\hat{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^n \omega_i u_i$
2. $\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta$
3. $\mathrm{V}(\hat{\beta}) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}$

よって，

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}\right),$$

となる。

1. $\hat{\alpha} = \alpha - (\hat{\beta} - \beta)\overline{X} + \overline{u}$
2. $\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \alpha$
3. $\mathrm{V}(\hat{\alpha}) = \dfrac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} = \sigma^2 \left(\dfrac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} + \dfrac{1}{n}\right)$

よって，

$$\hat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}\right),$$

となる。

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の性質：最良線型不偏性と一致性

不偏性：　既に証明したとおり，$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta$，$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \alpha$ なので，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ は β，α の不偏推定量である。

最良線型不偏性：　$\hat{\beta}$ を変形すると以下の通りとなる。

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} = \sum_{i=1}^n \omega_i Y_i$$

ただし，$\omega_i = \dfrac{(X_i - \overline{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}$ とする。このように，$\hat{\beta}$ は線型不偏推定量であると言える。

別の線型不偏推定量を次のように考える。

$$\widetilde{\beta} = \sum_{i=1}^n c_i Y_i$$

ただし，$c_i = \omega_i + d_i$ とする。$\widetilde{\beta}$ もまた β の不偏推定量と仮定したので，

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta} &= \sum_{i=1}^n c_i Y_i = \sum_{i=1}^n (\omega_i + d_i)(\alpha + \beta X_i + u_i) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^n \omega_i + \beta \sum_{i=1}^n \omega_i X_i + \sum_{i=1}^n \omega_i u_i + \alpha \sum_{i=1}^n d_i + \beta \sum_{i=1}^n d_i X_i + \sum_{i=1}^n d_i u_i \\
&= \beta + \alpha \sum_{i=1}^n d_i + \beta \sum_{i=1}^n d_i X_i + \sum_{i=1}^n \omega_i u_i + \sum_{i=1}^n d_i u_i
\end{aligned}$$

と変形される。$\sum_{i=1}^n \omega_i = 0$，$\sum_{i=1}^n \omega_i X_i = 1$ に注意。

よって，期待値をとると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\widetilde{\beta}) &= \beta + \alpha \sum_{i=1}^n d_i + \beta \sum_{i=1}^n d_i X_i + \sum_{i=1}^n \omega_i \mathrm{E}(u_i) + \sum_{i=1}^n d_i \mathrm{E}(u_i) \\
&= \beta + \alpha \sum_{i=1}^n d_i + \beta \sum_{i=1}^n d_i X_i
\end{aligned}$$

となる。$\widetilde{\beta}$ が不偏であるためには，

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} d_i X_i = 0,$$

の条件が必要となる。

この 2 つの条件が成り立っていると仮定すると，

$$\widetilde{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i) u_i$$

を利用して，

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\widetilde{\beta}) &= \mathrm{E}(\widetilde{\beta} - \beta)^2 = \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i) u_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i)^2 \mathrm{E}(u_i^2) \\
&= \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i d_i + \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \right) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \right)
\end{aligned}$$

$\widetilde{\beta}$ の不偏性の条件 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$，$\sum_{i=1}^{n} d_i X_i = 0$ を利用すると，

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i d_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) d_i}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i d_i - \overline{X} \sum_{i=1}^{n} d_i}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} = 0$$

を得る。

まとめると，$\widetilde{\beta}$ の分散は，

$$\mathrm{V}(\widetilde{\beta}) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \right)$$

となる。$\hat{\beta}$ の分散は，

$$\mathrm{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2$$

なので，

$$\mathrm{V}(\widetilde{\beta}) \geq \mathrm{V}(\hat{\beta})$$

となる。等号が成り立つときは，$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = 0$，すなわち，$d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$ のときとなり，これは $\hat{\beta}$ に一致する。

よって，$\hat{\beta}$ は最小分散線型不偏推定量，または，最良線型不偏推定量であると言える。

$\Longrightarrow$ ガウス=マルコフの定理

$\hat{\alpha}$ についても，同様で，α の最小分散線型不偏推定量となる。

証明は，

$$\hat{\alpha} - \alpha = -(\hat{\beta} - \beta)\overline{X} + \overline{u}$$

を利用すればよい。

推定量の関係 $\Longrightarrow$

最小分散 (最良) 線型不偏推定量 $\subset$ 線型不偏推定量 $\subset$ 線型推定量 $\subset$ 全推定量

一致性：　$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta$ となることが分かった。

n が大きくなると，$\hat{\beta}$ は β に近づくかどうかを調べる。

$$\mathrm{V}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\mathrm{V}(\hat{\beta}) \longrightarrow 0$ となれば，$\hat{\beta}$ は β の一致推定量となる。

最小二乗法の仮定の一つに，「$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \longrightarrow \infty$」というものがあった。この仮定は，「$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\mathrm{V}(\hat{\beta}) \longrightarrow 0$」を保証する。よって，$\hat{\beta}$ は β の一致推定量である。

$\hat{\alpha}$ についても，同様に，$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \alpha$ であることは分かっている。

$$\mathrm{V}(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \right)$$

となり，「$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\mathrm{V}(\hat{\alpha}) \longrightarrow 0$」となるので，$\hat{\alpha}$ も α の一致推定量であると言える。

6.3.4 誤差項 (または，攪乱項) u_i の分散 σ^2 について

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

誤差項 (または，攪乱項) の仮定：$u_i \sim N(0, \sigma^2)$

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{u}_i,$$

u_i の分散 σ^2 の不偏推定量：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{\text{自由度}}$$

$$\begin{aligned}\text{自由度} &= \text{標本数}\ (n) - \text{推定すべき係数値の数}\ (2)\\ &= n-2\end{aligned}$$

誤差項 (または，攪乱項) の母分散 σ^2 の不偏推定量 s^2 は，

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2, = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2,$$

によって与えられる。

s^2 の不偏性の証明： まず，次のように書き直す。

$$u_i = Y_i - \alpha - \beta X_i = (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i + \hat{u}_i) - \alpha - \beta X_i = (\hat{\alpha} - \alpha) + (\hat{\beta} - \beta)X_i + \hat{u}_i,$$

両辺を二乗する。

$$\begin{aligned}u_i^2 = &(\hat{\alpha} - \alpha)^2 + (\hat{\beta} - \beta)^2 X_i^2 + \hat{u}_i^2 + 2(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)X_i\\ &+2(\hat{\alpha} - \alpha)\hat{u}_i + 2(\hat{\beta} - \beta)X_i\hat{u}_i\end{aligned}$$

総和をとる。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} u_i^2 &= n(\hat{\alpha} - \alpha)^2 + (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 + 2(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)\sum_{i=1}^{n} X_i\\ &\quad +2(\hat{\alpha} - \alpha)\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i + 2(\hat{\beta} - \beta)\sum_{i=1}^{n} X_i\hat{u}_i\\ &= n(\hat{\alpha} - \alpha)^2 + (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 + 2n(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)\overline{X}\end{aligned}$$

期待値をとる。

$$\mathrm{E}(\sum_{i=1}^n u_i^2) = n\mathrm{E}(\hat\alpha-\alpha)^2 + \mathrm{E}(\hat\beta-\beta)^2\sum_{i=1}^n X_i^2 + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n \hat u_i^2)$$
$$+2n\mathrm{E}((\hat\alpha-\alpha)(\hat\beta-\beta))\overline{X}$$

$$n\sigma^2 = \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2} + \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2} + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n \hat u_i^2) - \frac{2n\sigma^2\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}$$
$$= 2\sigma^2\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}\right) + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n \hat u_i^2) = 2\sigma^2 + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n \hat u_i^2)$$

途中の計算には以下が使われる。

$$\mathrm{E}(\sum_{i=1}^n u_i^2) = n\sigma^2, \qquad \mathrm{E}(\hat\alpha-\alpha)^2 = \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^n X_i^2}{n\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2},$$
$$\mathrm{E}(\hat\beta-\beta)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}, \qquad \mathrm{E}((\hat\alpha-\alpha)(\hat\beta-\beta)) = -\frac{\sigma^2\overline{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2},$$

よって，

$$\mathrm{E}(s^2) = \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \hat u_i^2}{n-2}\right) = \sigma^2$$

を得る。すなわち，s^2 は σ^2 の不偏推定量である。

回帰分析に当てはめる。

$$\frac{\sum_{i=1}^n u_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i-\alpha-\beta X_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n),$$

α, β を推定値に置き換えると，

$$\frac{\sum_{i=1}^n \hat u_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i-\hat\alpha-\hat\beta X_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

となる。さらに，

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n (Y_i-\hat\alpha-\hat\beta X_i)^2,$$

なので，

$$\frac{\sum_{i=1}^n \hat u_i^2}{\sigma^2} = \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

を得る。

s^2 の一致性の証明：　s^2 は

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2,$$

と定義される。

$\dfrac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$ なので (証明略),

$$\mathrm{E}\left(\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}\right) = n-2, \qquad \mathrm{V}\left(\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-2),$$

となる。さらに，書き直すと，

$$\frac{(n-2)^2}{\sigma^4}\mathrm{V}(s^2) = 2(n-2), \qquad \mathrm{V}(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n-2},$$

を得る。「$\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$ で，しかも，$n \longrightarrow \infty$ のとき $\mathrm{V}(s^2) \longrightarrow 0$」が言えるので，$s^2$ は σ^2 の一致推定量である。

標準誤差について：　標準誤差 = 不偏分散の平方根

誤差項 (または，攪乱項) の標準誤差 s

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n-2}}$$

数値例：　$\hat{\alpha} = 0.5, \hat{\beta} = 0.7$ なので，$\hat{Y}_i = 0.7 + 0.8X_i$, $\hat{u}_i = Y_i - 0.7 - 0.8X_i$ により，$\hat{Y}_i, \hat{u}_i$ を計算する。

i	X_i	Y_i	X_i^2	X_iY_i	$\hat{Y}_i$	$\hat{u}_i$
1	5	4	25	20	4.0	0.0
2	1	1	1	1	1.2	−0.2
3	3	1	9	3	2.6	−1.6
4	2	3	4	6	1.9	1.1
5	4	4	16	16	3.3	0.7
合計	$\sum X_i$	$\sum Y_i$	$\sum X_i^2$	$\sum X_iY_i$	$\sum \hat{Y}_i$	$\sum \hat{u}_i$
	15	13	55	46	13	0.0
平均	$\overline{X}$	$\overline{Y}$				
	3	2.6				

誤差項 (または，攪乱項) の母分散 σ^2 の不偏推定量 s^2 は，

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 = \frac{1}{5-2}(0.0^2 + (-0.2)^2 + (-1.6)^2 + 1.1^2 + 0.7^2) = 1.43333$$

によって与えられる。

s は「回帰の標準誤差 (Standard Error of Regression)」と呼ばれ，この例では，$s = \sqrt{1.43333} = 1.197$ となる。

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分散の不偏推定量

$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の分散は，

$$\mathrm{V}(\hat{\alpha}) = \sigma_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}, \qquad \mathrm{V}(\hat{\beta}) = \sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

によって，与えられる。

σ^2 をその不偏分散 s^2 に置き換えることによって，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分散の不偏推定量を次のように得ることができる。

$$s_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{s^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}, \qquad s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

さらに，平方根をとって，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の標準誤差はそれぞれ，

$$s_{\hat{\alpha}} = s\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}, \qquad s_{\hat{\beta}} = \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}$$

として与えられる。

数値例：　$s^2 = 1.43333$ なので，

$$s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\overline{X}^2} = 1.433333 \times 0.1 = 0.1433333$$

$$s_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{s^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} = \frac{s^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\overline{X}^2)} = 1.433333 \times 1.1 = 1.5766667$$

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の標準誤差はそれぞれ，平方根をとって，

$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.1433333} = 0.3786, \qquad s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{1.5766667} = 1.25565$$

となる。

6.3.5 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分布

$\hat{\beta}$ について：

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})u_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i$$

$u_i \sim N(0, \sigma^2)$ で，かつ，それぞれ独立に分布する。また，$\hat{\beta}$ の平均，分散はそれぞれ，

$$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta, \qquad \mathrm{V}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2},$$

となるので，

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}),$$

を得る。変形すると，

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma / \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}} \sim N(0, 1),$$

となる。

さらに，

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

となり (証明略)，$\hat{\beta}$ とは独立なので (証明略)，

$$\frac{\dfrac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}}{\sqrt{\dfrac{(n-2)s^2}{\sigma^2}/(n-2)}} = \frac{\hat{\beta}-\beta}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} \sim t(n-2)$$

結果的には，σ を s で置き換えることによって，

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} \sim N(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\hat{\beta}-\beta}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} \sim t(n-2)$$

が得られる。

$\hat{\alpha}$ について：

また，$\hat{\alpha}$ の平均，分散はそれぞれ，

$$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \alpha, \qquad \mathrm{V}(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2},$$

となるので，

$$\hat{\alpha} \sim N\Big(\alpha, \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\Big),$$

を得る。変形すると，

$$\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sigma\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}} \sim N(0,1),$$

となる。

さらに，

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

となり (証明略)，$\hat{\alpha}$ とは独立なので (証明略)，

$$\frac{\dfrac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sigma\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-2)s^2}{\sigma^2}/(n-2)}} = \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{s\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}} \sim t(n-2)$$

結果的に見ると，σ を s で置き換えると，

$$\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sigma\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}} \sim N(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{s\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}} \sim t(n-2)$$

となる。

まとめ：

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2), \qquad \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{s_{\hat{\alpha}}} \sim t(n-2)$$

ただし，

$$s_{\hat{\beta}} = \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}, \qquad s_{\hat{\alpha}} = s\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}$$

とする。$s_{\hat{\beta}}$ は $\hat{\beta}$ の標準誤差，$s_{\hat{\alpha}}$ は $\hat{\alpha}$ の標準誤差とそれぞれ呼ばれる。

6.3.6　α，β の区間推定 (信頼区間)

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分布は，以下のように得られた。

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2), \qquad \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{s_{\hat{\alpha}}} \sim t(n-2),$$

$t_{\alpha/2}(n-2)$，$t_{1-\alpha/2}(n-2)$ をそれぞれ自由度 $n-2$ の t 分布の上側から $100\times\dfrac{\alpha}{2}$%点，$100\times(1-\dfrac{\alpha}{2})$%点の値とする。ただし，この α と切片の α は異なるものなので注意すること。このとき，

$$\mathrm{Prob}\Big(t_{1-\alpha/2}(n-2) < \frac{\hat{\beta}-\beta}{s_{\hat{\beta}}} < t_{\alpha/2}(n-2)\Big) = 1-\alpha,$$

すなわち，t 分布はゼロを中心として左右対称なので，$t_{1-\alpha/2}(n-2) = -t_{\alpha/2}(n-2)$ となり，

$$\mathrm{Prob}\Big(-t_{\alpha/2}(n-2) < \frac{\hat{\beta}-\beta}{s_{\hat{\beta}}} < t_{\alpha/2}(n-2)\Big) = 1-\alpha,$$

を得る。ただし，自由度と α が決まれば，$t_{\alpha/2}(n-2)$ は t 分布表から得られる。

書き直して，

$$\mathrm{Prob}\Big(\hat{\beta} - t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\beta}} < \beta < \hat{\beta} + t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\beta}}\Big) = 1-\alpha,$$

と表される。

したがって，$\hat{\beta}$，$s_{\hat{\beta}}$ を推定値で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の β の信頼区間は，

$$\Big(\hat{\beta} - t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\beta}},\ \hat{\beta} + t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\beta}}\Big)$$

となる。

同様に，信頼係数 $1-\alpha$ (この α は確率) の α (この α は切片) の信頼区間は，

$$\Big(\hat{\alpha} - t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\alpha}},\ \hat{\alpha} + t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\alpha}}\Big)$$

となる。

数値例：　今までと同様に，以下の数値例をとりあげる。

i	X_i	Y_i
1	5	4
2	1	1
3	3	1
4	2	3
5	4	4

回帰モデル $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ を推定した結果，以下の推定値を得た。

$$\hat{\beta} = 0.7, \qquad \hat{\alpha} = 0.5$$
$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.1433333} = 0.3786, \qquad s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{1.5766667} = 1.25565$$

$t_{0.025}(3) = 3.1824$ なので，信頼係数 0.95 の傾き β の信頼区間は，

$$(0.7 - 3.1824 \times 0.3786,\ 0.7 + 3.1824 \times 0.3786) = (-0.505,\ 1.905)$$

となり，信頼係数 0.95 の切片 α の信頼区間は，

$$(0.5 - 3.1824 \times 1.25565,\ 0.5 + 3.1824 \times 1.25565,) = (-3.496,\ 4.496)$$

となる。

同様にして，$t_{0.05}(3) = 2.3534$ なので，信頼係数 0.90 の傾き β の信頼区間は，

$$(0.7 - 2.3534 \times 0.3786,\ 0.7 + 2.3534 \times 0.3786) = (-0.191,\ 1.591)$$

となり，信頼係数 0.90 の切片 α の信頼区間は，

$$(0.5 - 2.3534 \times 1.25565,\ 0.5 + 2.3534 \times 1.25565) = (-2.455,\ 3.455)$$

となる。

6.3.7 α，β の仮説検定

「帰無仮説 $H_0 : \beta = \beta_0$，対立仮説 $H_1 : \beta \neq \beta_0$」の検定を行う。帰無仮説：$H_0 : \beta = \beta_0$ が正しいとき，

$$\frac{\hat{\beta} - \beta_0}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2),$$

となる。

よって，検定の手順は，

1. 検定統計値 $\dfrac{\hat{\beta}-\beta_0}{s_{\hat{\beta}}}$ を計算する。ただし，

$$s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}, \qquad s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n \hat{u}_t^2, \qquad \hat{u}_t = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i,$$
$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}, \qquad \hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X},$$

である。

2. 有意水準 α を決めて (この α は，回帰式の定数項の α とは異なることに注意)，自由度 $n-2$ の t 分布表から $100\times\alpha$ % 点の値を求める。通常，$\alpha = 0.01$，0.05 とす場合が多い。

3. 自由度 $n-2$ の t 分布表から得られた $100\times\alpha$ % 点の値と検定統計値の大小を比較する。すなわち，

$$\left|\frac{\hat{\beta}-\beta_0}{s_{\hat{\beta}}}\right| > t_{\alpha/2}(n-2),$$

ならば，有意水準 α で帰無仮説 H_0 ： $\beta = \beta_0$ を棄却する。帰無仮説 H_0 : $\beta = \beta_0$ を中心とした分布を考えるとき，データから得られた検定統計量は，分布の端にあり，確率的に起こりにくいと考える。

となる。
定数項の推定量 $\hat{\alpha}$ についても同様。

t 値について

特に,「帰無仮説： $H_0 : \beta = 0$，対立仮説： $H_1 : \beta \neq 0$」の検定は特別の意味を持つ。
帰無仮説のもとでは（「帰無仮説が正しいとき」と同じ意味），

$$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2)$$

の分布に従う。

このときの t 統計量の値 (すなわち，$\dfrac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}$) を t 値と呼ぶ。

$H_0 : \beta = 0$ という帰無仮説は，回帰式

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

において,「X_i が Y_i に何の影響も与えない」という仮説であることを意味する。

有意水準 α のもとで (この α は，回帰式の定数項の α とは異なることに注意),

$$\left|\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}\right| > t_{\alpha/2}(n-2)$$

ならば，有意水準 α で帰無仮説 H_0 : $\beta = 0$ を棄却する。

1. 回帰モデル

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

において，経済理論から $\beta > 0$ という符号条件が想定されたとする。

2. 有意水準 α を決める。(例えば，$\alpha = 0.05$, 0.01)

3. 実際のデータから，$\hat{\beta} > 0$ が得られた場合

   (a) t 値が,

$$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} > t_{\alpha/2}(n-2)$$

   となった場合，帰無仮説 H_0 : $\beta = 0$ が棄却され，$\beta > 0$ が統計的にも証明され，経済理論は現実経済をサポートする結果。

   (b) t 値が,

$$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} < t_{\alpha/2}(n-2)$$

   となった場合，帰無仮説 H_0 : $\beta = 0$ を棄却できず，$\hat{\beta} > 0$ にもかかわらず，$\beta < 0$ の可能性もあるため，経済理論が現実経済を積極的には支持しない。

4. 実際のデータから，$\hat{\beta} < 0$ が得られた場合

   (a) t 値が，

   $$-t_{\alpha/2}(n-2) < \frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}$$

   となった場合，帰無仮説 H_0：$\beta = 0$ を棄却できず，$\hat{\beta} < 0$ にもかかわらず，$\beta > 0$ の可能性もあるため，得られた推定結果と経済理論は完全に矛盾しているとは言えない。

   (b) t 値が，

   $$-t_{\alpha/2}(n-2) > \frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}$$

   となった場合，帰無仮説 H_0：$\beta = 0$ は棄却され，統計的には $\beta < 0$ となり，得られた推定結果と経済理論は完全に矛盾している。すなわち，この場合，経済理論の立て直しが必要。

数値例：　今までと同様に，以下の数値例をとりあげる。

i	X_i	Y_i
1	5	4
2	1	1
3	3	1
4	2	3
5	4	4

回帰モデル $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ を推定した結果，以下の推定値を得た。

$$\hat{\beta} = 0.7, \qquad s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.1433333} = 0.3786,$$

帰無仮説 H_0：$\beta = 0$，対立仮説 H_0：$\beta \neq 0$ の検定を行う。t 値は $0.7/0.3786 = 1.849$，有意水準 5 % の $t_{\alpha/2}(n-2)$ の値は 3.1824 となり $(\alpha = 0.05, n = 5)$，

$$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = \frac{0.7}{\sqrt{0.1433333}} = 1.849 < t_{\alpha/2}(n-2) = 3.1824$$

を得る。このように，有意水準 5 % で帰無仮説 H_0： $\beta = 0$ は棄却されない。よって，β の符号は統計学的に確定できない。

また，α についても同様に，t 値を計算できる。

$$\hat{\alpha} = 0.5, \qquad s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{1.5766667} = 1.25565,$$

なので，t 値は，

$$\frac{\hat{\alpha}}{s_{\hat{\alpha}}} = \frac{0.5}{\sqrt{1.5766667}} = 0.398 < t_{\alpha/2}(n-2) = 3.1824,$$

となり，有意水準 5 % で H_0： $\alpha = 0$ を棄却できない。

しかし，定数項については，経済学的意味が無い場合が多い。

推定結果の表記方法：　回帰モデル：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

の推定の結果，$\hat{\alpha} = 0.5, \hat{\beta} = 0.7$, $s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{1.5766667} = 1.25565$, $s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.1433333} = 0.3786$, $\dfrac{\hat{\alpha}}{s_{\hat{\alpha}}} = 0.398$, $\dfrac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = 1.849$, $s^2 = 1.433333$ (すなわち，$s = 1.197$), $R^2 = 0.5326$, $\overline{R}^2 = 0.3768$, を得た。これらをまとめて，

$$Y_i = \underset{(0.398)}{0.5} + \underset{(1.849)}{0.7}\, X_i,$$

$$R^2 = 0.5326, \quad \overline{R}^2 = 0.3768, \quad s = 1.197,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。

または，

$$Y_i = \underset{(1.25565)}{0.5} + \underset{(0.3786)}{0.7}\, X_i,$$

$$R^2 = 0.5326, \quad \overline{R}^2 = 0.3768, \quad s = 1.197,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は標準誤差を表すものとする。

のように書く。

6.4　確率的モデル：重回帰モデル

n 組のデータ $(Y_i, X_{1i}, X_{2i}, \cdots, X_{ki})$, $i = 1, 2, \cdots, n$ を用いて，k 変数の多重回帰モデルを考える。

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

ただし，X_{ji} は j 番目の説明変数の第 i 番目の観測値を表す。u_i は誤差項 (または，攪乱項) で，同じ仮定を用いる (すなわち，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は互いに独立に，平均ゼロ，分散 σ^2 の正規分布に従う)。$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ は推定されるべきパラメータである。すべての i について，$X_{1i} = 1$ とすれば，β_1 は定数項として表される。

6.4.1　推定量の性質

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ の最小二乗推定量は $\hat\beta_1, \hat\beta_2, \cdots, \hat\beta_k$ とする。

誤差項 (または，攪乱項) u_i の分散 σ^2 の推定量 s^2 は,

$$s^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}\hat u_i^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat\beta_1 X_{1i} - \hat\beta_2 X_{2i} - \cdots - \hat\beta_k X_{ki})^2$$

として表される。

このとき,

$$\mathrm{E}(\hat\beta_j) = \beta_j, \qquad \mathrm{plim}\,\hat\beta_j = \beta_j, \qquad \mathrm{E}(s^2) = \sigma^2, \qquad \mathrm{plim}\; s^2 = \sigma^2,$$

を証明することが出来る。(証明略)

分布について：　$\hat\beta_1, \hat\beta_2, \cdots, \hat\beta_k$ の分散は以下のように表される。

$$\mathrm{V}\begin{pmatrix}\hat\beta_1\\ \hat\beta_2\\ \vdots\\ \hat\beta_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{V}(\hat\beta_1) & \mathrm{Cov}(\hat\beta_1,\hat\beta_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(\hat\beta_1,\hat\beta_k)\\ \mathrm{Cov}(\hat\beta_2,\hat\beta_1) & \mathrm{V}(\hat\beta_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(\hat\beta_2,\hat\beta_k)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{Cov}(\hat\beta_k,\hat\beta_1) & \mathrm{Cov}(\hat\beta_k,\hat\beta_2) & \cdots & \mathrm{V}(\hat\beta_k)\end{pmatrix}$$

$$= \sigma^2 \begin{pmatrix} \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum X_{1i}X_{ki} \\ \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \cdots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{1i}X_{ki} & \sum X_{2i}X_{ki} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

最後の等号の右辺の逆行列の i 行 j 列目の要素を a_{ij} としたとき，$\hat{\beta}_j$ の分散は，

$$\mathrm{V}(\hat{\beta}_j) = \sigma^2 a_{jj}$$

となる（証明略）。このとき，

$$\hat{\beta}_j \sim N(\beta_j, \sigma^2 a_{jj}),$$

となり，標準化すると，

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma\sqrt{a_{jj}}} \sim N(0,1),$$

が得られる。さらに，

$$\frac{(n-k)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k),$$

となり (証明略)，しかも，$\hat{\beta}_j$ と s^2 の独立性から (証明略)，

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s\sqrt{a_{jj}}} \sim t(n-k)$$

となる。このように，通常の区間推定や仮説検定を行うことが出来る。

(注)　$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は互いに独立で，$u_i \sim N(0, \sigma^2)$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{u_i}{\sigma}\Big)^2 \sim \chi^2(n)$$

となる。u_i をその推定値 $\hat{u}_i$ で置き換えると，

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\hat{u}_i}{\sigma}\Big)^2 = \frac{(n-k)s^2}{\sigma^2} \ \sim\ \chi^2(n-k),$$

ただし，s^2 は σ^2 の推定量で，$s^2 = \dfrac{1}{n-k}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$ である。$\hat{u}_i$ を得るためには，$\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k$（$k$ 個のパラメータ推定値）を求めなければならない。$n-k$（= データ数 − パラメータ数）を自由度と呼ばれる。