第7章　ダミー変数

7.1　異常値ダミー

データに異常値が含まれている場合，経済構造がある時期から変化した場合，ダミー変数を使う。

ダミー変数とは，0 と 1 から成る変数のことである。

例えば，データが 20 期間あるとして，9 期目のデータが，回帰直線から離れている場合 (異常値の場合) を考える。

$$D_i = \begin{cases} 0, & i \neq 9 \text{ のとき} \\ 1, & i = 9 \text{ のとき} \end{cases}$$

という変数を作り，

$$Y_i = \alpha + \delta D_i + \beta X_i + u_i$$

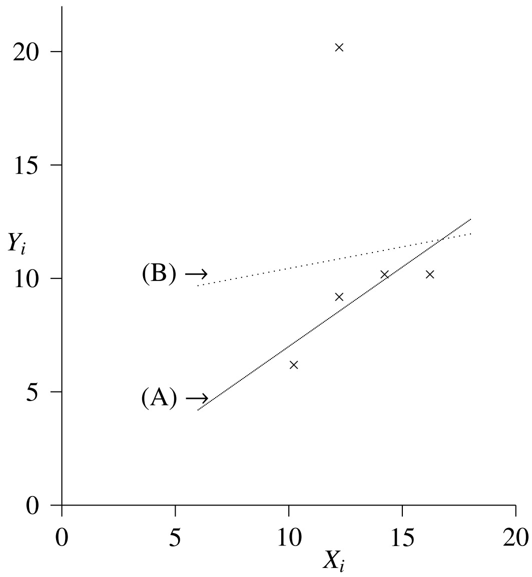
を推定する。δ の推定値 $\hat{\delta}$ の有意性を調べることによって，異常値かどうかの検定ができる。

数値例：　今までと同様に，以下の数値例をとりあげる。

i	Y_i	X_i	D_i
1	6	10	0
2	9	12	0
3	10	14	0
4	10	16	0
5	20	12	1

第 5 期目が異常値である。

図 3： 異常値



(A) は $i = 1, 2, 3, 4$ のデータを使って，推定した回帰直線である。(B) は $i = 1, 2, 3, 4, 5$ のデータを使って，推定した回帰直線である。(A), (B) の推定結果は以下のとおりである。

$$\text{(A)}: \; Y_i = \underset{(0.095)}{0.3} + \underset{(2.708)}{0.65} X_i,$$

$$R^2 = 0.786, \quad s^2 = 1.072^2,$$

$$\text{(B)}: \; Y_i = \underset{(0.49)}{8.54} + \underset{(0.14)}{0.19} X_i,$$

$$R^2 = 0.007, \quad s^2 = 6.09^2,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。

このように，結果が大幅に変わる。第 5 期は異常値なので，ダミー変数を用いて，

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma D_i + u_i,$$

として推定を行う。$i = 1, 2, 3, 4$ について，$D_i = 0$ とし，$i = 5$ について，$D_i = 1$ とする変数である。この回帰式の意味は，

$$Y_i = \begin{cases} \alpha + \beta X_i + u_i, & i = 1, 2, 3, 4 \text{ のとき}, \\ (\alpha + \gamma) + \beta X_i + u_i, & i = 5 \text{ のとき}, \end{cases}$$

となる。推定結果は，

$$Y_i = \underset{(0.095)}{0.3} + \underset{(2.708)}{0.65} X_i + \underset{(9.73)}{11.9} D_i,$$
$$R^2 = 0.979, \quad s^2 = 1.072^2,$$

となる。この場合，$\hat{Y}_5 = Y_5$，すなわち，$\hat{u}_5 = 0$ となることに注意。

7.2 構造変化ダミー

次に，9 期目以前と以降とで，経済構造が変化している場合を考える。

$$D_i = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \cdots, 8 \text{ のとき} \\ 1, & i = 9, 10, \cdots, 20 \text{ のとき} \end{cases}$$

という変数を作り，

$$Y_i = \alpha + \delta D_i + \beta X_i + u_i$$

を推定する (定数項だけが変化したと考えた場合)。または，

$$Y_i = \alpha + \delta D_i + \beta X_i + \gamma D_i X_i + u_i$$

を推定する (定数項も係数も変化)。

δ や γ の推定値の有意性を調べることによって，構造変化の検定を行うことができる。

上の例でデータを示すと，

i	Y_i	X_i	D_i	D_iX_i
1	Y_1	X_1	0	0
2	Y_2	X_2	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
8	Y_8	X_8	0	0
9	Y_9	X_9	1	X_9
10	Y_{10}	X_{10}	1	X_{10}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	Y_{20}	X_{20}	1	X_{20}

となる。

7.3　季節ダミー

季節性のあるデータを扱う場合，

$$D_{1i} = \begin{cases} 1, & i\text{ が第一四半期のとき} \\ 0, & \text{他} \end{cases}$$

$$D_{2i} = \begin{cases} 1, & i\text{ が第二四半期のとき} \\ 0, & \text{他} \end{cases}$$

$$D_{3i} = \begin{cases} 1, & i\text{ が第三四半期のとき} \\ 0, & \text{他} \end{cases}$$

という 3 つのダミー変数を作り，

7.4　地域差ダミー

関西と関東とで賃金格差があるかどうかを調べたい。

$$w_i = \alpha + \beta D_i + \cdots + u_i$$

添え字 i は個人を表すものとする。

$$D_i = \begin{cases} 1, & i \text{番目の人が関東に住んでいるとき} \\ 0, & i \text{番目の人が関西に住んでいるとき} \end{cases}$$

7.5 男女別ダミー

男女間で賃金格差があるかどうかを調べたい。

$$w_i = \alpha + \beta D_i + \cdots + u_i$$

添え字 i は個人を表すものとする。

$$D_i = \begin{cases} 1, & i \text{番目の人が女性のとき} \\ 0, & i \text{番目の人が男性のとき} \end{cases}$$

第8章　関数型について

線型：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

この場合，

$$\beta = \frac{\mathrm{d}Y_i}{\mathrm{d}X_i}$$

なので，β は，X_i が一単位上昇 (下落) したとき，Y_i は何単位上昇 (下落) するのかを表す。すなわち，β は限界係数と呼ばれる。

成長率：

$$100 \times \frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}} = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

として，成長率を被説明変数として用いる場合もある。$100 \times \dfrac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}}$ という変数をあらかじめ作っておき，これをこれまでの Y_i として扱う。

注意：

$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ と $100 \times \dfrac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}} = \alpha + \beta X_i + u_i$ では，得られる決定係数の大きさが全く異なる。単純に，R^2 や $\overline{R}^2$ による比較はこの場合出来ない。

$\Longrightarrow$ s^2 で比較すればよい。

対数線型：

$$\log(Y_i) = \alpha + \beta \log(X_i) + u_i,$$

この場合，

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\log(Y_i)}{\mathrm{d}\log(X_i)} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}Y_i}{Y_i}}{\dfrac{\mathrm{d}X_i}{X_i}} = \frac{100\dfrac{\mathrm{d}Y_i}{Y_i}}{100\dfrac{\mathrm{d}X_i}{X_i}}$$

となる。

2 つ目の等号では，$\dfrac{\mathrm{d}\log(Y_i)}{\mathrm{d}Y_i} = \dfrac{1}{Y_i}$ が利用される。

3 つ目の等号の分子 $100\dfrac{\mathrm{d}Y_i}{Y_i}$ や分母 $100\dfrac{\mathrm{d}X_i}{X_i}$ は上昇率を表す。

したがって，β は，X_i が 1%上昇 (下落) したとき，Y_i は何%上昇 (下落) するのかを表す。β は弾力性と呼ばれる。

例： コブ＝ダグラス型生産関数：

$$Q_i = \beta_1 K_i^{\beta_2} L_i^{\beta_3}$$

ただし，Q_i は生産量，K_i は資本，L_i は労働である。この場合，対数変換によって，

$$\log(Q_i) = \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + \beta_3 \log(L_i) + u_i,$$

として，$\log(Q_i)$, $\log(K_i)$, $\log(L_i)$ のデータをあらかじめ変換しておき，最小二乗法で $\beta_1', \beta_2, \beta_3$ を推定する。また，生産関数には一次同次の制約 $\beta_2 + \beta_3 = 1$ を置く場合が多い。この場合は，

$$\begin{aligned}\log(Q_i) &= \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + \beta_3 \log(L_i) \\ &= \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + (1 - \beta_2)\log(L_i) + u_i \\ &= \beta_1' + \beta_2(\log(K_i) - \log(L_i)) + \log(L_i) + u_i,\end{aligned}$$

となるので，

$$\log(Q_i) - \log(L_i) = \beta_1' + \beta_2(\log(K_i) - \log(L_i)) + u_i,$$

を最小二乗法で推定し，β_1', β_2 を求めることになる。この場合も同様に，各変数をあらかじめ，$\log(Q_i) - \log(L_i)$，$\log(K_i) - \log(L_i)$ としてデータを作っておく必要がある。

二次式：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma X_i^2 + u_i,$$

$\Longrightarrow$ 平均費用と生産量との関係等

逆数：

$$Y_i = \alpha + \beta \frac{1}{X_i} + u_i,$$

$\Longrightarrow$ 賃金上昇率と失業率との関係 (フィリップス曲線)

遅れのある変数：　習慣的効果を考慮に入れたモデル：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma Y_{i-1} + u_i,$$

ラグ付き内生変数が説明変数に用いられる。

X_i の Y_i への効果は，短期効果，長期効果の 2 つある。β は短期効果を表す係数である。長期効果とは，$Y_i = Y_{i-1}$ となるときの，X_i から Y_i への影響を示す効果である。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma Y_i + u_i,$$

として，Y_i について解くと，

$$Y_i = \frac{\alpha}{1-\gamma} + \frac{\beta}{1-\gamma} X_i + \frac{1}{1-\gamma} u_i,$$

となり，$\dfrac{\beta}{1-\gamma}$ が X_i の Y_i への長期効果を表す係数となる。

問題点：

1. 最小二乗法の仮定の一つに，説明変数は確率変数ではないという仮定がある。ラグ付き内生変数を説明変数に加えることによって，この仮定が満たされなくなる。最小二乗推定量は最小分散線型不偏推定量ではなくなる。

2. Y_i と X_i とは，経済理論的に考えると，相関が高いはず。Y_i と Y_{i-1} は相関が高い。当然，Y_{i-1} と X_i も高い相関を示す。

   $\Longrightarrow$ 多重共線性の可能性が高い。

3. DW 統計量は意味をなさない。(DW については，後述)

遅れのある変数の解釈 (部分調整モデル)： X_i が与えられたときの Y の最適水準を Y_i^* とする。

$$Y_i^* = \alpha + \beta X_i,$$

現実の水準 Y_i は，最適水準 Y_i^* と前期の水準 Y_{i-1} との差の一定割合と前期の水準 Y_{i-1} との和で与えられるとする。調整関数を考える。

$$Y_i - Y_{i-1} = \lambda(Y_i^* - Y_{i-1}) + u_i,$$

ただし，u_i は互いに独立で同一な分布の誤差項，$0 < \lambda < 1$ とする。

よって，

$$Y_i = \lambda\alpha + \lambda\beta X_i + (1-\lambda)Y_{i-1} + u_i,$$

を得る。

Y_{i-1} と u_i との相関はない。

しかし，Y_{i-1} が説明変数の一つに入っている (説明変数間が確率変数でないという仮定に反する)。

推定量は不偏推定量ではないが，一致推定量である (証明略)。

第9章　雑多なこと

9.1　系列相関：DW について

9.1.1　DW について

最小自乗法の仮定の一つに,「攪乱項 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ はそれぞれ独立に分布する」というものがあった。ダービン・ワトソン比 (DW) とは，誤差項の系列相関，すなわち，u_i と u_{i-1} との間の相関の有無を検定するために考案された。

$\Longrightarrow$ 時系列データのときのみ有効

$u_1, u_2, \cdots, u_n$ の系列について，それぞれの符号が，+ + + - - - - + + - - - + + のように，プラスが連続で続いた後で，マイナスが連続で続くというような場合，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は正の系列相関があると言う。また，+ - + - + - + - + のように交互にプラス，マイナスになる場合，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 負の系列相関があると言う。

特徴： $u_1, u_2, \cdots, u_i$ から u_{i+1} の符号が予想できる。$\Longrightarrow$ 「$u_1, u_2, \cdots, u_n$ はそれぞれ独立に分布する」という仮定に反する。

すなわち，ダービン・ワトソン比とは，回帰式が

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \alpha + \beta X_i + u_i, \\
u_i &= \rho u_{i-1} + \epsilon_i,
\end{aligned}
$$

のときに，H_0： $\rho = 0, H_1$： $\rho \neq 0$ の検定である。ただし，$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。

ダービン・ワトソン比の定義は次の通りである。

$$
DW = \frac{\sum_{i=2}^{n} (\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}
$$

DW は近似的に，次のように表される。

$$DW=\frac{\sum_{i=2}^n(\hat{u}_i-\hat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n\hat{u}_i^2}=\frac{\sum_{i=2}^n\hat{u}_i^2-2\sum_{i=2}^n\hat{u}_i\hat{u}_{i-1}+\sum_{i=2}^n\hat{u}_{i-1}^2}{\sum_{i=1}^n\hat{u}_i^2}$$
$$=\frac{2\sum_{i=1}^n\hat{u}_i^2-(\hat{u}_1^2+\hat{u}_n^2)}{\sum_{i=1}^n\hat{u}_i^2}-2\frac{\sum_{i=2}^n\hat{u}_i\hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=1}^n\hat{u}_i^2}\approx 2(1-\hat{\rho}),$$

以下の 2 つの近似が用いられる。

$$\frac{\hat{u}_1^2+\hat{u}_n^2}{\sum_{i=1}^n\hat{u}_i^2}\approx 0,\qquad \frac{\sum_{i=2}^n\hat{u}_i\hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=1}^n\hat{u}_i^2}=\frac{\sum_{i=2}^n\hat{u}_i\hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=2}^n\hat{u}_{i-1}^2+\hat{u}_n^2}\approx\frac{\sum_{i=2}^n\hat{u}_i\hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=2}^n\hat{u}_{i-1}^2}=\hat{\rho}$$

すなわち，$\hat{\rho}$ は $\hat{u}_i$ と $\hat{u}_{i-1}$ の回帰係数である。$u_i=\rho u_{i-1}+\epsilon_i$ において，u_i, u_{i-1} の代わりに $\hat{u}_i, \hat{u}_{i-1}$ に置き換えて，ρ の推定値 $\hat{\rho}$ を求める。

1. DW の値が 2 前後のとき，系列相関なし ($\hat{\rho}=0$ のとき，$DW\approx 2$)。
2. DW が 2 より十分に小さいとき，正の系列相関と判定される。
3. DW が 2 より十分に大きいとき，負の系列相関と判定される。

正確な判定には，データ数 n とパラメータ数 k に依存する。表 9.1 と表 9.2 を参照せよ。

表 9.1 と表 9.2 で，k' は定数項を除くパラメータ数を表すものとする。

数値例：　今までと同じ数値例で，DW を計算する。

i	Y_i	X_i	X_iY_i	X_i^2	$\hat{Y}_i$	$\hat{u}_i$
1	6	10	60	100	6.8	−0.8
2	9	12	108	144	8.1	0.9
3	10	14	140	196	9.4	0.6
4	10	16	160	256	10.7	−0.7
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum X_iY_i$	$\sum X_i^2$	$\sum\hat{Y}_i$	$\sum\hat{u}_i$
	35	52	468	696	35	0
平均	$\overline{Y}$	$\overline{X}$				
	8.75	13				

$$DW=\frac{\sum_{i=2}^n(\hat{u}_i-\hat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n\hat{u}_i^2}$$
$$=\frac{(-0.8-0.9)^2+(0.9-0.6)^2+(0.6-(-0.7))^2}{(-0.8)^2+0.9^2+0.6^2+(-0.7)^2}=\frac{4.67}{2.30}=2.03$$

推定結果の表記方法：　回帰モデル：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

の推定の結果，$\hat{\alpha} = 0.3, \hat{\beta} = 0.65$, $s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{10.0005} = 3.163$, $s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.0575} = 0.240$, $\dfrac{\hat{\alpha}}{s_{\hat{\alpha}}} = 0.095$, $\dfrac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = 2.708$, $s^2 = 1.15$ (すなわち，$s = 1.07$), $R^2 = 0.786$, $\overline{R}^2 = 0.679$, $DW = 2.03$ を得た。これらをまとめて，

$$Y_i = \underset{(0.095)}{0.3} + \underset{(2.708)}{0.65} X_i,$$

$$R^2 = 0.786, \quad \overline{R}^2 = 0.679, \quad s = 1.07, \quad DW = 2.03,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。

または,

$$Y_i = \underset{(3.163)}{0.3} + \underset{(0.240)}{0.65} X_i,$$

$$R^2 = 0.786, \quad \overline{R}^2 = 0.679, \quad s = 1.07, \quad DW = 2.03,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は標準誤差を表すものとする。

のように書く。$s = \sqrt{1.15} = 1.07$ に注意。

図 4： 正の系列相関

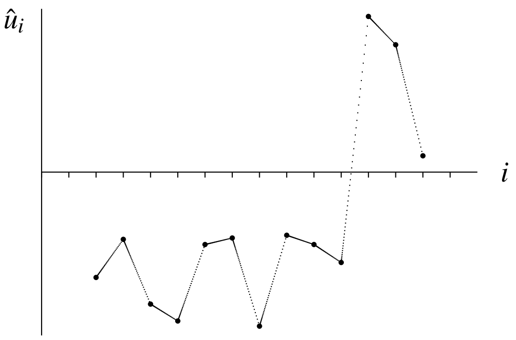


図 5： 負の系列相関

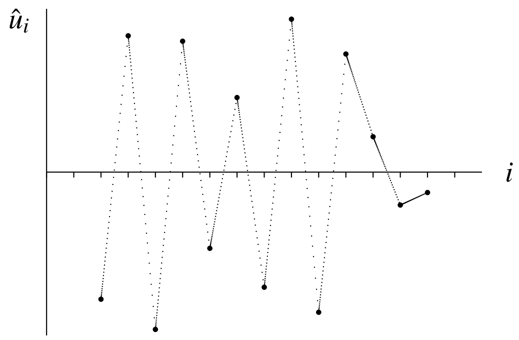


表 9.1: ダービン・ワトソン統計量の 5 % 点の上限と下限

(1) $k' = 1$

	A		B		C		D		E	
n	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	0	1.08	1.08	1.36	1.36	2.64	2.64	2.92	2.92	4
20	0	1.20	1.20	1.41	1.41	2.59	2.59	2.80	2.80	4
25	0	1.29	1.29	1.45	1.45	2.55	2.55	2.71	2.71	4
30	0	1.35	1.35	1.49	1.49	2.51	2.51	2.65	2.65	4

(2) $k' = 2$

	A		B		C		D		E	
n	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	0	0.95	0.95	1.54	1.54	2.46	2.46	3.05	3.05	4
20	0	1.10	1.10	1.54	1.54	2.46	2.46	2.90	2.90	4
25	0	1.21	1.21	1.55	1.55	2.45	2.45	2.79	2.79	4
30	0	1.28	1.28	1.57	1.57	2.43	2.43	2.72	2.72	4

(3) $k' = 3$

	A		B		C		D		E	
n	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	0	0.82	0.82	1.75	1.75	2.25	2.25	2.25	3.18	4
20	0	1.00	1.00	1.68	1.68	2.32	2.32	2.32	3.00	4
25	0	1.12	1.12	1.66	1.66	2.34	2.34	2.34	2.88	4
30	0	1.21	1.21	1.65	1.65	2.35	2.35	2.35	2.79	4

(4) $k' = 4$

	A		B		C		D		E	
n	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	0	0.69	0.69	1.97	1.97	2.03	2.03	3.31	3.31	4
20	0	0.90	0.90	1.83	1.83	2.17	2.17	3.10	3.10	4
25	0	1.04	1.04	1.77	1.77	2.23	2.23	2.96	2.96	4
30	0	1.14	1.14	1.74	1.74	2.26	2.26	2.86	2.86	4

(5) $k' = 5$

	A		B		C		D		E	
n	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	0	0.56	0.56	2.21	—	—	2.21	3.44	3.44	4
20	0	0.79	0.79	1.99	1.99	2.01	2.01	3.21	3.21	4
25	0	0.95	0.95	1.89	1.89	2.11	2.11	3.05	3.05	4
30	0	1.07	1.07	1.83	1.83	2.17	2.17	2.93	2.93	4

A: 正の系列相関あり
B: 系列相関の有無を判定不能
C: 系列相関なし

表 9.2: ダービン・ワトソン統計量の 5 % 点の上限と下限

	$k'=1$		$k'=2$		$k'=3$		$k'=4$		$k'=5$		$k'=6$		$k'=7$		$k'=8$		$k'=9$		$k'=10$		$k'=11$		$k'=12$		$k'=13$	
n	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du
6	0.610	1.400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0.700	1.356	0.467	1.896	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.367	2.287	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	0.927	1.324	0.758	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.315	2.645	0.203	3.004	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.380	2.506	0.268	2.832	0.171	3.149	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.444	2.390	0.328	2.692	0.230	2.985	0.147	3.266	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296	0.389	2.572	0.286	2.848	0.200	3.111	0.127	3.360	—	—	—	—	—	—	—	—
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220	0.447	2.471	0.343	2.727	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438	—	—	—	—	—	—
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157	0.502	2.388	0.398	2.624	0.304	2.860	0.222	3.090	0.155	3.304	0.098	3.503	—	—	—	—
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104	0.554	2.318	0.451	2.537	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184	0.138	3.378	0.087	3.557	—	—
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060	0.603	2.257	0.502	2.461	0.407	2.668	0.321	2.873	0.244	3.073	0.177	3.265	0.123	3.441	0.078	3.603
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023	0.649	2.206	0.549	2.396	0.456	2.589	0.369	2.783	0.290	2.974	0.220	3.159	0.160	3.335	0.111	3.496
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991	0.691	2.162	0.595	2.339	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885	0.263	3.063	0.200	3.234	0.145	3.395
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964	0.731	2.124	0.637	2.290	0.546	2.461	0.461	2.633	0.380	2.806	0.307	2.976	0.240	3.141	0.182	3.300
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940	0.769	2.090	0.677	2.246	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.735	0.349	2.897	0.281	3.057	0.220	3.211
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920	0.804	2.061	0.715	2.208	0.628	2.360	0.545	2.514	0.465	2.670	0.391	2.826	0.322	2.979	0.259	3.129
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902	0.837	2.035	0.750	2.174	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613	0.431	2.761	0.362	2.908	0.297	3.053
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886	0.868	2.013	0.784	2.144	0.702	2.280	0.621	2.419	0.544	2.560	0.470	2.702	0.400	2.844	0.335	2.983
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873	0.897	1.992	0.816	2.117	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513	0.508	2.649	0.438	2.784	0.373	2.919
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861	0.925	1.974	0.845	2.093	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.470	0.544	2.600	0.475	2.730	0.409	2.860
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850	0.951	1.959	0.874	2.071	0.798	2.188	0.723	2.309	0.649	2.431	0.578	2.555	0.510	2.680	0.445	2.805
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841	0.975	1.944	0.900	2.052	0.826	2.164	0.753	2.278	0.681	2.396	0.612	2.515	0.544	2.634	0.479	2.754
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833	0.998	1.931	0.926	2.034	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363	0.643	2.477	0.577	2.592	0.513	2.708
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825	1.020	1.920	0.950	2.018	0.879	2.120	0.810	2.226	0.741	2.333	0.674	2.443	0.608	2.553	0.545	2.665
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819	1.041	1.909	0.972	2.004	0.904	2.102	0.836	2.203	0.769	2.306	0.703	2.411	0.638	2.518	0.576	2.625
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813	1.061	1.900	0.994	1.991	0.927	2.085	0.861	2.181	0.796	2.281	0.731	2.382	0.667	2.484	0.606	2.588
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808	1.079	1.891	1.015	1.978	0.950	2.069	0.885	2.162	0.821	2.257	0.758	2.355	0.695	2.454	0.634	2.553
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803	1.097	1.884	1.034	1.967	0.971	2.054	0.908	2.144	0.845	2.236	0.783	2.330	0.722	2.425	0.662	2.521
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799	1.114	1.876	1.053	1.957	0.991	2.041	0.930	2.127	0.868	2.216	0.808	2.306	0.748	2.398	0.689	2.492
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795	1.131	1.870	1.071	1.948	1.011	2.029	0.951	2.112	0.891	2.197	0.831	2.285	0.772	2.374	0.714	2.464
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792	1.146	1.864	1.088	1.939	1.029	2.017	0.970	2.098	0.912	2.180	0.854	2.265	0.796	2.351	0.739	2.438
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789	1.161	1.859	1.104	1.932	1.047	2.007	0.990	2.085	0.932	2.164	0.875	2.246	0.819	2.329	0.763	2.413
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786	1.175	1.854	1.120	1.924	1.064	1.997	1.008	2.072	0.952	2.150	0.896	2.228	0.840	2.309	0.785	2.391
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776	1.238	1.835	1.189	1.895	1.139	1.958	1.089	2.022	1.038	2.088	0.988	2.156	0.938	2.225	0.887	2.296
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771	1.291	1.822	1.246	1.875	1.201	1.930	1.156	1.986	1.110	2.044	1.064	2.103	1.019	2.163	0.973	2.225
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768	1.334	1.814	1.294	1.861	1.253	1.909	1.212	1.959	1.170	2.010	1.129	2.062	1.087	2.116	1.045	2.170
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767	1.372	1.808	1.335	1.850	1.298	1.894	1.260	1.939	1.222	1.984	1.184	2.031	1.145	2.079	1.106	2.127
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767	1.404	1.805	1.370	1.843	1.336	1.882	1.301	1.923	1.266	1.964	1.231	2.006	1.195	2.049	1.160	2.093
70	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768	1.433	1.802	1.401	1.838	1.369	1.874	1.337	1.910	1.305	1.948	1.272	1.987	1.239	2.026	1.206	2.066
75	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770	1.458	1.801	1.428	1.834	1.399	1.867	1.369	1.901	1.339	1.935	1.308	1.970	1.277	2.006	1.247	2.043
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772	1.480	1.801	1.453	1.831	1.425	1.861	1.397	1.893	1.369	1.925	1.340	1.957	1.312	1.990	1.283	2.024
85	1.623	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774	1.500	1.801	1.474	1.829	1.448	1.857	1.422	1.886	1.396	1.916	1.369	1.946	1.342	1.977	1.315	2.008
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776	1.518	1.801	1.494	1.827	1.469	1.854	1.445	1.881	1.420	1.909	1.395	1.937	1.369	1.966	1.344	1.995
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778	1.535	1.802	1.512	1.827	1.489	1.852	1.465	1.877	1.442	1.903	1.418	1.930	1.394	1.956	1.370	1.984
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780	1.550	1.803	1.528	1.826	1.506	1.850	1.484	1.874	1.462	1.898	1.439	1.923	1.416	1.948	1.393	1.974
150	1.720	1.747	1.706	1.760	1.693	1.774	1.679	1.788	1.665	1.802	1.651	1.817	1.637	1.832	1.622	1.846	1.608	1.862	1.593	1.877	1.579	1.892	1.564	1.908	1.549	1.924
200	1.758	1.779	1.748	1.789	1.738	1.799	1.728	1.809	1.718	1.820	1.707	1.831	1.697	1.841	1.686	1.852	1.675	1.863	1.665	1.874	1.654	1.885	1.643	1.897	1.632	1.908

n は標本数，k' は定数項を除く説明変数の数とする。

（出所）`http://www.stanford.edu/~clint/bench/dwcrit.htm`

9.1.2　最小二乗推定量の分散について

単回帰

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i, \qquad n = 1, 2, \cdots, n$$

仮定：$\mathrm{E}(u_i) = 0$

$\mathrm{V}(u_i) = \mathrm{E}(u_i^2) = \sigma^2$

$i \neq j$ について，$\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = \mathrm{E}(u_i u_j) = \sigma_{ij} \longleftarrow$ この仮定追加

系列相関を無視して，通常の最小二乗推定量は，

$$\hat\beta = \sum_i \omega_i Y_i = \beta + \sum_i \omega_i u_i$$

である。ただし，$\omega_i = \dfrac{X_i - \overline{X}}{\sum_j (X_j - \overline{X})^2}$

$\mathrm{E}(\hat\beta)$ について，

$$\mathrm{E}(\hat\beta) = \mathrm{E}(\beta + \sum_i \omega_i u_i) = \beta + \sum_i \omega_i \mathrm{E}(u_i) = \beta$$

$u_1, u_2, \cdots, u_n$ に系列相関があっても，$\hat\beta$ は不偏推定量となる。

$\mathrm{V}(\hat\beta)$ について，

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\hat\beta) &= \mathrm{V}(\beta + \sum_i \omega_i u_i) = \mathrm{V}(\sum_i \omega_i u_i) = \mathrm{E}((\sum_i \omega_i u_i)^2) \quad \longleftarrow \text{分散の定義} \\
&= \mathrm{E}((\sum_i \omega_i u_i)(\sum_j \omega_j u_j)) \quad \longleftarrow \text{添字一つ変更} \\
&= \mathrm{E}(\sum_i \sum_j \omega_i \omega_j u_i u_j) = \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \mathrm{E}(u_i u_j) = \sum_i \omega_i^2 \mathrm{E}(u_i^2) + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \omega_i \omega_j \mathrm{E}(u_i u_j) \\
&= \sigma^2 \sum_i \omega_i^2 + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \sigma_{ij} \omega_i \omega_j \neq \sigma^2 \sum_i \omega_i^2
\end{aligned}$$

したがって，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ に系列相関があるとき，通常の最小二乗推定量 $\hat\beta$ の分散の推定量は，$s^2 \sum_i \omega_i^2 + \sum_i \sum_{j, i\neq j} s_{ij}\omega_i\omega_j$ とならなければならない。s^2, s_{ij} は σ^2, σ_{ij} の推定量とする。しかし，計量ソフトは $s^2 \sum_i \omega_i^2$ と計算する。

9.1.3 系列相関のもとで回帰式の推定

回帰式が

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \alpha + \beta X_i + u_i, \\
u_i &= \rho u_{i-1} + \epsilon_i,
\end{aligned}
$$

のときの推定を考える。ただし，$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。

u_i を消去すると，

$$(Y_i - \alpha - \beta X_i) = \rho(Y_{i-1} - \alpha - \beta X_{i-1}) + \epsilon_i,$$

また，少し整理すると，

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = \alpha(1-\rho) + \beta(X_i - \rho X_{i-1}) + \epsilon_i,$$

となる。

$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とするので，最小二乗法を適用が可能となる。しかし，通常の最小二乗法と同様に，残差平方和を最小にするような推定量 $\hat\alpha$，$\hat\beta$，$\hat\rho$ を求めたいが，$\hat\alpha$，$\hat\beta$，$\hat\rho$ の解を (X_i, Y_i) の陽関数の形で書き表すことは不可能である。したがって，少し工夫が必要となる。

残差 $\hat\epsilon_i$ を次のように二通りの表し方をする。

- $\hat\epsilon_i = \hat u_i - \hat\rho \hat u_{i-1}$，ただし，$\hat u_i = Y_i - \hat\alpha - \hat\beta X_i$
- $\hat\epsilon_i = Y_i^* - \hat\alpha' - \hat\beta X_i^*$，ただし，$Y_i^* = Y_i - \hat\rho Y_{i-1}$，$X_i^* = X_i - \hat\rho X_{i-1}$，$\hat\alpha' = \hat\alpha(1-\hat\rho)$

残差平方和 $\sum_{i=2}^{n} \hat{\epsilon}_i$ を $S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$ とおく。$S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$ を最小にするような $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{\rho}$ を求める。すなわち，次の最小化問題を解く。

$$\min_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho}} S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$$

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{\rho}$ について $S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$ を微分してゼロとおいて，

$$\frac{\partial S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})}{\partial \hat{\alpha}} = \frac{\partial S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})}{\partial \hat{\alpha}'} \frac{\partial \hat{\alpha}'}{\partial \hat{\alpha}} = -2(1-\hat{\rho}) \sum_{i=2}^{n} (Y_i^* - \hat{\alpha}' - \hat{\beta} X_i^*) = 0$$

$$\frac{\partial S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})}{\partial \hat{\beta}} = -2 \sum_{i=2}^{n} X_i^* (Y_i^* - \hat{\alpha}' - \hat{\beta} X_i^*) = 0$$

$$\frac{\partial S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})}{\partial \hat{\rho}} = -2 \sum_{i=2}^{n} \hat{u}_{i-1} (\hat{u}_i - \hat{\rho} \hat{u}_{i-1}) = 0$$

の 3 つの連立方程式を解く。すなわち，

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=2}^{n} (X_i^* - \overline{X}_i^*)(Y_i^* - \overline{Y}_i^*)}{\sum_{i=2}^{n} (X_i^* - \overline{X}_i^*)^2}$$

$$\hat{\alpha}' = \hat{\alpha}(1-\hat{\rho}) = \overline{Y}_i^* - \hat{\beta} \overline{X}_i^*$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=2}^{n} \hat{u}_{i-1} \hat{u}_i}{\sum_{i=2}^{n} \hat{u}_{i-1}^2}$$

を解くことになる。ただし，$\overline{X}_i^* = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=2}^{n} X_i^*$，$\overline{Y}_i^* = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=2}^{n} Y_i^*$ とする（$n-1$ 個のデータの平均）。

計算の手順として，

(i) $\hat{\rho}$ に与えたもとで（最初は $\hat{\rho} = 0$），上記最初の 2 つの式を用いて，$(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ を求める。

(ii) $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ を与えたもとで，上記 3 つ目の式を用いて，$\hat{\rho}$ を求める。

(iii) 上記手順 (i) と (ii) を交互に，$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$ が収束するまで繰り返す。

とする。この計算手順はコクラン＝オーカット法 (Cochrane-Orcutt estimation) と呼ばれる。

簡便法：ρ の求め方： より簡単なもう一つの方法として，DW は近似的に $DW \approx 2(1-\widehat{\rho})$ と表されるので，DW から $\widehat{\rho}$ を逆算して求める。そして，$Y_i^* = Y_i - \widehat{\rho}Y_{i-1}$，$X_i^* = X_i - \widehat{\rho}X_{i-1}$ を新たな変数として，

$$Y_i^* = \alpha' + \beta X_i^* + \epsilon_i,$$

に最小二乗法を適用する。ただし，$\alpha' = \alpha(1-\hat{\rho})$ とする。

より一般的に，回帰式が

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i,$$

の重回帰ときの推定を考える。ただし，$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。

u_i を消去すると，

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = \beta_1(X_{1i} - \rho X_{1,i-1}) + \beta_2(X_{2i} - \rho X_{2,i-1}) + \cdots + \beta_k(X_{ki} - \rho X_{k,i-1}) + \epsilon_i,$$

となる。残差平方和 $S(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k, \hat{\rho}) = \sum_{i=2}^n \hat{\epsilon}_i^2$ を最小にする $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k, \hat{\rho}$ を求める。ただし，$\hat{\epsilon}_i = Y_i^* - \hat{\beta}_1 X_{1i}^* - \hat{\beta}_2 X_{2i}^* - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki}^*$，または，$\hat{\epsilon}_i = \hat{u}_i - \hat{\rho}\hat{u}_{i-1}$ のどちらかで残差が表される。また，式中の記号は，$Y_i^* = Y_i - \hat{\rho}Y_{i-1}$，$X_{ji}^* = X_{ji} - \hat{\rho}X_{j,i-1}$，$j = 1, 2, \cdots, k$，$\hat{u}_i = Y_i - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i} - \cdots - \beta_k X_{ki}$ である。

最小化のための一階の条件は，

$$\frac{S(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k, \hat{\rho})}{\hat{\beta}_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, k$$

$$\frac{S(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k, \hat{\rho})}{\hat{\rho}} = 0$$

であり，具体的に計算すると，

$$\frac{S(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k, \hat{\rho})}{\hat{\beta}_j} = -2\sum_{i=2}^n X_{ji}^*(Y_i^* - \hat{\beta}_1 X_{1i}^* - \hat{\beta}_2 X_{2i}^* - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki}^*) = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, k$$

$$\frac{S(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k, \hat{\rho})}{\hat{\rho}} = -2\sum_{i=2}^n \hat{u}_{i-1}(\hat{u}_i - \hat{\rho}\hat{u}_{i-1}) = 0$$

となる。$(k+1)$ 本の連立方程式から，$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k, \hat{\rho}$ が得られる。単回帰のときと同様に，収束計算によって求めることになる。$\longrightarrow$ コクラン＝オーカット法 (Cochrane-Orcutt estimation)

簡便法：ρ の求め方：　より簡単なもう一つの方法として，DW は近似的に $DW \approx 2(1-\widehat{\rho})$ と表されるので，DW は近似的に $DW \approx 2(1-\widehat{\rho})$ と表されるので，DW から $\widehat{\rho}$ を逆算して求める。そして，$Y_i^* = Y_i - \widehat{\rho}Y_{i-1}$，$X_{1i}^* = X_{1i} - \widehat{\rho}X_{1,i-1}$，$X_{2i}^* = X_{2i} - \widehat{\rho}X_{2,i-1}$，$\cdots$，$X_{ki}^* = X_{ki} - \widehat{\rho}X_{k,i-1}$ を新たな変数として，

$$Y_i^* = \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^* + \cdots + \beta_k X_{ki}^* + \epsilon_i,$$

に最小二乗法を適用する。

9.2　不均一分散 (不等分散)

9.2.1　不均一分散 (不等分散) の意味と推定方法

回帰式が

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

の場合を考える。X_i が外生変数，Y_i は内生変数，u_i は互いに独立な同一の分布を持つ攪乱項 (最小二乗法に必要な仮定) とする。「独立な同一の分布」の意味は「攪乱項 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ はそれぞれ独立に平均ゼロ，分散 σ^2 の分布する」である。

分散が時点に依存する場合，代表的には，分散が他の変数 (例えば，z_i) に依存する場合，すなわち，u_i の平均はゼロ，分散は $\sigma_*^2 z_i^2$ の場合は，最小二乗法の仮定に反する。そのため，単純には，$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ に最小二乗法を適用できない。以下のような修正が必要となる。

$$\begin{aligned}\frac{Y_i}{z_i} &= \alpha\frac{1}{z_i} + \beta\frac{X_i}{z_i} + \frac{u_i}{z_i}\\ &= \alpha\frac{1}{z_i} + \beta\frac{X_i}{z_i} + u_i^*\end{aligned}$$

このとき，新たな攪乱項 u_i^* は平均ゼロ，分散 σ_*^2 の分布となる (すなわち,「同一の」分布)。

$$\mathrm{E}(u_i^*) = \mathrm{E}\left(\frac{u_i}{z_i}\right) = \left(\frac{1}{z_i}\right)\mathrm{E}(u_i) = 0$$

u_i の仮定 $\mathrm{E}(u_i) = 0$ が使われている。

$$\mathrm{V}(u_i^*) = \mathrm{V}\left(\frac{u_i}{z_i}\right) = \left(\frac{1}{z_i}\right)^2 \mathrm{V}(u_i) = \sigma_*^2$$

u_i の仮定 $\mathrm{V}(u_i) = \sigma_*^2 z_i^2$ が最後に使われている。

よって，$\dfrac{Y_i}{z_i}, \dfrac{1}{z_i}, \dfrac{X_i}{z_i}$ を新たな変数として，最小二乗法を適用することができる。

不均一分散の検定について

$$\hat{u}_i^2 = \gamma z_i^2 + \epsilon_i$$

を推定し，γ の推定値 $\hat{\gamma}$ の有意性の検定を行う (通常の t 検定)。

z_i は回帰式に含まれる変数でもよい。例えば，u_i の平均はゼロ，分散は $\sigma_*^2 X_i^2$ の場合，各変数を X_i で割って，

$$\begin{aligned}\frac{Y_i}{X_i} &= \alpha\frac{1}{X_i} + \beta + \frac{u_i}{X_i} \\ &= \alpha\frac{1}{X_i} + \beta + u_i^*\end{aligned}$$

を推定すればよい。β は定数項として推定されるが，意味は限界係数 (すなわち，傾き) と同じなので注意すること。

9.2.2 最小二乗推定量の分散について

単回帰

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i, \qquad n = 1, 2, \cdots, n$$

仮定：$\mathrm{E}(u_i) = 0$

$\mathrm{V}(u_i) = \mathrm{E}(u_i^2) = \sigma_i^2 \longleftarrow$ この仮定追加

$i \neq j$ について，$\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = \mathrm{E}(u_i u_j) = 0$

不均一分散を無視して，通常の最小二乗推定量は，

$$\hat{\beta} = \sum_i \omega_i Y_i = \beta + \sum_i \omega_i u_i$$

である。ただし，$\omega_i = \dfrac{X_i - \overline{X}}{\sum_j (X_j - \overline{X})^2}$

$\mathrm{E}(\hat{\beta})$ について，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\hat{\beta}) &= \mathrm{E}(\beta + \sum_i \omega_i u_i) \\ &= \beta + \sum_i \omega_i \mathrm{E}(u_i) = \beta\end{aligned}$$

$u_1, u_2, \cdots, u_n$ の分散が不均一であっても，$\hat{\beta}$ は不偏推定量となる。

$\mathrm{V}(\hat{\beta})$ について，

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\hat{\beta}) &= \mathrm{V}(\beta + \sum_i \omega_i u_i) = \mathrm{V}(\sum_i \omega_i u_i) \\ &= \mathrm{E}((\sum_i \omega_i u_i)^2) \quad \longleftarrow \text{分散の定義} \\ &= \mathrm{E}((\sum_i \omega_i u_i)(\sum_j \omega_j u_j)) \quad \longleftarrow \text{添字一つ変更} \\ &= \mathrm{E}(\sum_i \sum_j \omega_i \omega_j u_i u_j) \\ &= \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \mathrm{E}(u_i u_j) \\ &= \sum_i \omega_i^2 \mathrm{E}(u_i^2) + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \sum_j \omega_i \omega_j \mathrm{E}(u_i u_j) \\ &= \sum_i \sigma_i^2 \omega_i^2 \neq \sigma^2 \sum_i \omega_i^2\end{aligned}$$

したがって，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ の分散が不均一であるとき，通常の最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ の分散の推定量は，$s_i^2 \sum_i \omega_i^2$ とならなければならない。

s_i^2 は σ_i^2 の推定量とする。
しかし，計量ソフトは $s^2 \sum_i \omega_i^2$ と計算する。

9.3 多重共線性について

回帰式が

$$Y_i = \alpha W_i + \beta X_i + u_i$$

の場合を考える。W_i, X_i が外生変数，Y_i は内生変数，u_i は互いに独立な攪乱項とする。$W_i = 1$ のとき，α は定数項となる。

W_i と X_i の相関が大きいことを多重共線性が強いと言う。

W_i と X_i の相関が大きい場合は，α, β の推定値は不安定になる。

極端な場合，W_i と X_i の相関が 1 の場合 (完全相関の場合) は，すべての i について，$W_i = \gamma X_i$ となる。この場合，回帰式は

$$\begin{aligned} Y_i &= \alpha W_i + \beta X_i + u_i \\ &= (\alpha\gamma + \beta) X_i + u_i \end{aligned}$$

となり，$\alpha\gamma + \beta$ を推定することは可能だが，α, β を別々に推定することはできなくなる。$Y_i = \alpha W_i + \beta X_i + u_i$ を推定した場合，$\alpha\gamma + \beta$ の推定値が一定値となる $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の組み合わせは無数に存在する。この意味で，$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は不安定であると言える。

厳密には，最小二乗法によると，

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha W_i - \beta X_i)^2$$

を最小にする α, β をその推定値 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ とする。

すなわち，

$$\frac{\partial \sum u_i^2}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha W_i - \beta X_i) W_i = 0$$

$$\frac{\partial \sum u_i^2}{\partial \beta} = -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \alpha W_i - \beta X_i)X_i = 0$$

の連立方程式を解くことになる。

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i W_i - \hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n} W_i^2 - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i W_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n} W_i X_i - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$$

行列表示により，

$$\begin{pmatrix} \sum Y_i W_i \\ \sum Y_i X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum W_i^2 & \sum X_i W_i \\ \sum W_i X_i & \sum X_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$$

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ について表すと，

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum W_i^2 & \sum X_i W_i \\ \sum W_i X_i & \sum X_i^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \sum Y_i W_i \\ \sum Y_i X_i \end{pmatrix}$$

逆行列を計算して，

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{(\sum W_i^2)(\sum X_i^2) - (\sum W_i X_i)^2} \times \begin{pmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i W_i \\ -\sum W_i X_i & \sum W_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum Y_i W_i \\ \sum Y_i X_i \end{pmatrix}$$

完全な多重共線性の場合 ($W_i = \gamma X_i$ の場合)，

$$(\sum W_i^2)(\sum X_i^2) - (\sum W_i X_i) = 0$$

となる。

また，

$$\begin{aligned} \mathrm{V}\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathrm{V}(\hat{\alpha}) & \mathrm{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & \mathrm{V}(\hat{\beta}) \end{pmatrix} \\ &= \sigma^2 \begin{pmatrix} \sum W_i^2 & \sum X_i W_i \\ \sum W_i X_i & \sum X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{\sigma^2}{(\sum W_i^2)(\sum X_i^2) - (\sum W_i X_i)^2} \\ &\times \begin{pmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i W_i \\ -\sum W_i X_i & \sum W_i^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので，完全な多重共線性の場合は，推定値の分散が無限大となる。推定値の分散が無限大という意味は，どこにパラメータがあるか分からないということを意味する。

簡単化のため，$\overline{W} = \dfrac{1}{n}\sum W_i = 0$，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum X_i = 0$ とする。W_i と X_i との相関係数を r とすると，

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{\sum (W_i - \overline{w})(X_i - \overline{X})}{\sqrt{\sum (W_i - \overline{W})^2 \sum (X_i - \overline{X})^2}} \\
&= \frac{\sum W_i X_i}{\sqrt{\sum W_i^2 \sum X_i^2}}
\end{aligned}
$$

となる。さらに，r を用いて，$\mathrm{V}(\hat{\alpha})$，$\mathrm{V}(\hat{\beta})$ を求めると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\hat{\alpha}) &= \frac{\sigma^2 \sum X_i^2}{(\sum W_i^2)(\sum X_i^2) - (\sum W_i X_i)^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{(1 - r^2)\sum W_i^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\hat{\beta}) &= \frac{\sigma^2 \sum W_i^2}{(\sum W_i^2)(\sum X_i^2) - (\sum W_i X_i)^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{(1 - r^2)\sum X_i^2}
\end{aligned}
$$

が得られる。

これは，r が 1 または -1 に近づくにつれて (または，r^2 が 1 に近づくにつれて)，$\mathrm{V}(\hat{\alpha})$，$\mathrm{V}(\hat{\beta})$ は大きくなるということを意味する。

$\Longrightarrow$ 係数の推定値の有意性が低くなる。

$\Longrightarrow$ 本来は W_i や X_i が Y_i に影響を与えているにもかかわらず，統計的に有意な推定値は得られなくなるので，回帰分析によって理論モデルを立証しようという試みは成功しなくなる。

多重共線性の症状：　多重共線性が起こっていると考えられるケースは，

1. 推定値の符号が理論と合わない。
2. 決定係数 (R^2 や $\overline{R}^2$) は大きいのに，個々の t 値は小さい。
3. 観測値の数 (データ数) を少し増やすと，推定値が大きく変わる。
4. 説明変数を増減すると，推定値が大きく変動する。

等である。

9.4　F 検定について

複数の線形制約の検定を行う場合に F 検定が用いられる。

9.4.1　いくつかの例

例 1： コブ＝ダグラス型生産関数：　Q_i は生産量，K_i は資本，L_i は労働とする。生産関数を推定する。

$$\log(Q_i) = \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + \beta_3 \log(L_i) + u_i,$$

において，一次同時の制約 $\beta_2 + \beta_3 = 1$ を検定したい。すなわち，帰無仮説，対立仮説は以下のように表される。

帰無仮説 H_0： $\beta_2 + \beta_3 = 1$，
対立仮説 H_1： $\beta_2 + \beta_3 \neq 1$，

例 2： 構造変化の検定：　n_0 期以前と $n_0 + 1$ 期以降とで経済構造が変化したと考えて推定を行う。しかも，定数項，傾き共に変化したと想定した場合，回帰式は以下のようになる。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma D_i + \delta D_i X_i + u_i,$$

ただし，

$$D_i = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \cdots, n_0 \text{ のとき}, \\ 1, & i = n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots, n \text{ のとき}, \end{cases}$$

とする。構造変化が $n_0 + 1$ 期で起こったかどうかを検定したい。すなわち，帰無仮説，対立仮説は以下のように表される。

帰無仮説 H_0： $\gamma = \delta = 0$,
対立仮説 H_1： $\gamma \neq 0$，または，$\delta \neq 0$,

例 3： 多重回帰モデルの係数の同時検定：　2 つの説明変数が含まれる場合を考える。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma Z_i + u_i,$$

のモデルにおいて，X_i と Z_i のどちらも，Y_i に影響を与えていないという仮説を検定したい。この場合，帰無仮説，対立仮説は以下のように表される。

帰無仮説 H_0： $\beta = \gamma = 0$,
対立仮説 H_1： $\beta \neq 0$，または，$\gamma \neq 0$,

9.4.2 統計学の復習

$U \sim \chi^2(n)$，$V \sim \chi^2(m)$，U と V は独立とする。
このとき，

$$F = \frac{U/n}{V/m} \sim F(n, m)$$

となる。

9.4.3　検定の方法

多重回帰モデル

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

において，パラメータ $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ に何らかの制約が妥当かどうかを検定する。

制約の数を G 個とする。

全く制約の無い場合に得られた残差を $\hat{u}_i$ とする。

制約を含めて推定されたときの残差を $\widetilde{u}_i$ とする。

すなわち，

帰無仮説 H_0： $\beta_{k-G+1} = \cdots = \beta_k = 0$,

対立仮説 $H_1 : H_0$ でない。

を検定する場合，

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_{k-G} X_{k-G,i} + \beta_{k-G+1} X_{k-G+1,i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

の推定によって得られた残差を $\hat{u}_i$ (制約なし残差) とおき，

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_{k-G} X_{k-G,i} + u_i,$$

の推定によって得られた残差を $\widetilde{u}_i$ (制約付き残差) とする。

1. H_0 が真のとき，$\dfrac{\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(G)$ となる。(証明略)
2. また，$\dfrac{\sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$ となる。(証明略)
3. さらに，$\dfrac{\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2}$ と $\dfrac{\sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2}$ とは独立に分布する。(証明略)
4. したがって，この場合，

$$\frac{(\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2)/G}{\sum \hat{u}_i^2/(n-k)} \sim F(G, n-k),$$

となる。(証明略)

例 **1**： コブ＝ダグラス型生産関数：
　制約なしの場合：

$$\log(Q_i) = \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + \beta_3 \log(L_i) + u_i,$$

$\beta_2 + \beta_3 = 1$ の制約ありの場合：

$$\log(\frac{Q_i}{L_i}) = \beta_1' + \beta_2 \log(\frac{K_i}{L_i}) + u_i,$$

例 **2**： 構造変化の検定：
　制約なしの場合：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma D_i + \delta D_i X_i + u_i,$$

$\gamma = \delta = 0$ の制約ありの場合：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

例 **3**： 多重回帰モデルの係数の同時検定：
　制約なしの場合：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma Z_i + u_i,$$

$\beta = \gamma = 0$ の制約ありの場合：

$$Y_i = \alpha + u_i,$$

9.5　説明変数と誤差項に相関がある場合

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

(1) X_i は非確率変数 $\longrightarrow$ 今までの最小二乗推定量

(2) X_i は確率変数

(2a) X_i と u_i は相関なし $\longrightarrow$ $\sigma_{xu} = \mathrm{Cov}(X_i, u_i) = 0$

(2b) X_i は u_i は相関あり $\longrightarrow$ $\sigma_{xu} = \mathrm{Cov}(X_i, u_i) \neq 0$

$$\min_{\hat{\alpha},\hat{\beta}} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2$$

となるような $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を求める（最小自乗法）。

(4.1) 式，(4.2) 式によって，$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は，

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i) = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i) = 0,$$

を満たす。$\hat{u}_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i$ により，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = 0, \quad \longrightarrow \mathrm{E}(u_i) = 0 \text{ に対応}$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\hat{u}_i = 0, \longrightarrow \mathrm{E}(X_i u_i) = 0 \text{ に対応}$$

を満たす。

$\hat{\beta}$ にのみに着目する。

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i Y_i = \beta + \sum_{i=1} \omega_i u_i$$

ただし，

$$\omega_i = \frac{X_i - \overline{X}}{\sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2}$$

とする。

すべての $i, j = 1, 2, \cdots, n$ について，$\mathrm{E}(X_i u_j) = 0$ であれば，$\mathrm{E}(\omega_i u_i) = 0$ となるので，

$$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta$$

となる。すなわち，X_i が確率変数であっても，X_i と u_j に相関がなければ，$\hat{\beta}$ は β の不偏推定量となる。

しかし，$\mathrm{E}(X_i u_i) \neq 0$ であれば，$\mathrm{E}(\omega_i u_i) \neq 0$ となるので，

$$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta + \sum_{i=1} \mathrm{E}(\omega_i u_i) \neq \beta$$

となる。不偏推定量でなくなる。

解決策：　$\mathrm{E}(Z_i u_i) = 0$ となる Z_i があるとする。

$\tilde{u}_i = Y_i - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} X_i$ とする。

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i = 0, \quad \longrightarrow \mathrm{E}(u_i) = 0 \text{ に対応}$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\tilde{u}_i = 0, \longrightarrow \mathrm{E}(Z_i u_i) = 0 \text{ に対応}$$

を満たす $\tilde{\alpha}$，$\tilde{\beta}$ を求める。

すなわち，

$$\overline{Y} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\overline{X} = 0,$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i Y_i = \tilde{\alpha}\overline{Z} + \tilde{\beta}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i X_i = 0,$$

の連立方程式を解く。ただし，$\overline{Z} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} Z_i$ とする。

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i Y_i - n\overline{Z}\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{n} Z_i X_i - n\overline{Z}\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})(X_i - \overline{X})}$$
$$\tilde{\alpha} = \overline{Y} - \tilde{\beta}\overline{X},$$

$\tilde{\alpha}$，$\tilde{\beta}$ の推定は操作変数法と呼ばれる。

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})(X_i - \overline{X})} \\
&= \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})(u_i - \overline{u})}{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})(X_i - \overline{X})} \\
&= \beta + \frac{(1/n)\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})u_i}{(1/n)\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})(X_i - \overline{X})} \ \longrightarrow\ \beta
\end{aligned}$$

ただし，$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$，$\overline{Y} = \alpha + \beta\overline{X} + \overline{u}$，$\overline{u} = (1/n)\sum_{i=1}^{n}$ とする。また，最後で，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})u_i \longrightarrow Cov(Z_i, u_i) = 0$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})(X_i - \overline{X}) \longrightarrow Cov(Z_i, X_i) \neq 0$$

を利用している。

分散は，下記のように計算される。

$$\mathrm{V}(\tilde{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2}{\left(\sum_{j=1}^{n}(Z_j - \overline{Z})(X_j - \overline{X})\right)^2}$$

ただし，

$$\omega_i = \frac{(Z_i - \overline{Z})}{\sum_{j=1}^{n}(Z_j - \overline{Z})(X_j - \overline{X})}$$

とする。

特に，Z_i に X_i の最小二乗法に基づいた予測値（すなわち，$\hat{X}_i$）を用いた場合の操作変数法を二段階最小二乗法と呼ぶ。

予測値 $\hat{X}_i$ は，まず，次の回帰式を最小二乗法によって推定する。

$$X_i = b_1 W_{1i} + b_2 W_{2i} + \cdots$$

$b_1, b_2, \cdots$ をその最小二乗推定値で置き換えて，$\hat{X}_i = \hat{b}_1 W_{1i} + \hat{b}_2 W_{2i} + \cdots$ を求める。

次に，Z_i の代わりに $\hat{X}_i$ を用いて，$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ を最小二乗法で求める。

予測値 $\hat{X}_i$ を求めるための変数 $W_{1,i}, W_{2,i}, \cdots$ は u_i と相関があってはならない。一つの例として，時系列データの場合で，しかも，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ に系列相関がなければ，$X_{i-1}, X_{i-2}, \cdots$ などのラグ変数を $W_{1,i}, W_{2,i}, \cdots$ に用いるのも一つの有効な手段である。

9.6 応用例

9.6.1 マクロの消費関数

1. 所得から税金を差し引いたものを可処分所得と呼ぶが，可処分所得 (Y) が増えれば消費 (C) も増える。
2. この関数を $C = \alpha + \beta Y$ という線形 (一次式) によって表されると仮定しよう。
3. この場合，経済学では，α は基礎消費，β は限界消費性向と呼ばれる。
4. α で表される基礎消費とは所得がなくても日常生活に最低限必要な消費 (すなわち，衣食住宅費等) であり，β の限界消費性向とは所得が 1 円増えれば消費はいくら増えるのかという指標である。
5. α, β はパラメータと呼ばれ，未知である。
6. C や Y は『国民経済計算年報』(経済企画庁編) から「国内家計最終消費支出」「家計国民可処分所得」という項目で，それぞれデータは公表される。
7. ここでは，平成 10 年版の『国民経済計算年報』のデータを扱う。

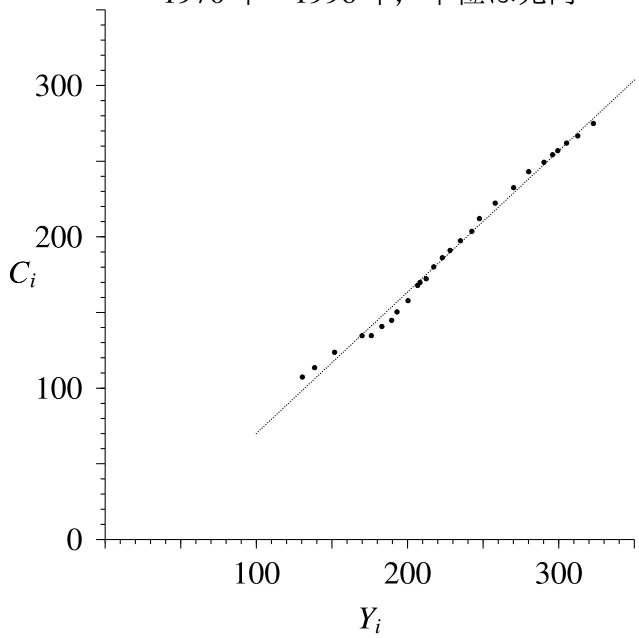
1. 『国民経済計算年報』から「国内家計最終消費支出」と「家計国民可処分所得」の 1970 年〜1996 年の年次データ (時系列データの種類は年次データ，四半期データ，月次データ等がある) を取ってくる。
2. 計量分析で重要なことは，**名目値**でなく**実質値**をとるということである。
3. 実質値とはある基準となる年を定めて，その年の物価で生のデータ (名目値) を変換するということである。
4. 実質値 $= \dfrac{\text{名目値}}{\text{物価指数}}$ という関係が成り立つ。(ここでの「物価指数」は基準年次を 1 とした場合のもので，もし基準年次が 100 ならば，実質値 $= \dfrac{\text{名目値}}{\text{物価指数}/100}$ とする必要がある。)

表 9.3: 所得と消費のデータ

暦年	国内家計最終支出	家計可処分所得	国内家計最終支出デレータ
1970	37784.1	45913.2	35.2
1971	42571.6	51944.3	37.5
1972	49124.1	60245.4	39.7
1973	59366.1	74924.8	44.1
1974	71782.1	93833.2	53.3
1975	83591.1	108712.8	59.4
1976	94443.7	123540.9	65.2
1977	105397.8	135318.4	70.1
1978	115960.3	147244.2	73.5
1979	127600.9	157071.1	76.0
1980	138585.0	169931.5	81.6
1981	147103.4	181349.2	85.4
1982	157994.0	190611.5	87.7
1983	166631.6	199587.8	89.5
1984	175383.4	209451.9	91.8
1985	185335.1	220655.6	93.9
1986	193069.6	229938.8	94.8
1987	202072.8	235924.0	95.3
1988	212939.9	247159.7	95.8
1989	227122.2	263940.5	97.7
1990	243035.7	280133.0	100.0
1991	255531.8	297512.9	102.5
1992	265701.6	309256.6	104.5
1993	272075.3	317021.6	105.9
1994	279538.7	325655.7	106.7
1995	283245.4	331967.5	106.2
1996	291374.8	342303.0	106.0

図 9.1: 実質消費 (縦軸) と実質所得 (横軸)

1970 年〜1996 年，単位は兆円



5. 異なる時点間でデータを比較する場合，それぞれの時点で物価が異なるので，物価の変動を取り除いたデータで比較する必要がある。

6. ここで用いられる国内家計最終消費支出 C_i と家計国民可処分所得 Y_i のデータは名目データであり，実質データに変換する必要がある。

7. 1990 年の「国内家計最終消費支出デフレータ」は 100 なので，基準年次は 1990 年となる。

8. 1990 年の貨幣価値に変換することを，1990 年価格で実質化すると言う。

まず最初に，

$$C_i = \alpha + \beta Y_i + u_i, \qquad u_i \sim N(0, \sigma^2),$$

の推定を行う。ただし，u_i は互いに独立に正規分布するものと仮定する。

$$C_i = \underset{(3844.54)}{-23216.7} + \underset{(.016333)}{.933542}\ Y_i,$$

$$R^2 = .992406, \quad \overline{R}^2 = .992102,$$

$$s = 4557.04, \quad DW = .289838,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は，係数推定値の標準誤差を表すものとする。

1. 推定値の符号条件について，基礎消費の推定値 $\hat{\alpha}$ は -23216.7 で負，限界消費性向の推定値 $\hat{\beta}$ は 0.933542 で正となっている。基礎消費についてはは符号条件を満たさないが，限界消費性向は符号条件を満たす。

2. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ から，α, β の符号を統計的に調べる。

   (a) データ数は 27，推定すべきパラメータ数は 2 なので，自由度は $27-2=25$ となる。

   (b) $\alpha = 0.05$ のとき $t_{\alpha/2}(25) = 2.060$，$\alpha = 0.01$ のとき $t_{\alpha/2}(25) = 2.787$ である。

   (c) 有意水準 0.05 のとき，H_0 : $\alpha = 0$，H_1 : $\alpha \neq 0$ の結果は，
   $$\frac{-23216.7}{3844.54} = -6.039 < -t_{0.025}(25) = -2.060,$$
   有意水準 0.05 のとき，H_0 : $\beta = 0$，H_1 : $\beta \neq 0$ の結果は，
   $$\frac{.933542}{.016333} = 57.16 > t_{0.025}(25) = 2.060,$$
   となり，共に統計的に有意である。

   (d) したがって，実証結果から，真の基礎消費 α は負，真の限界消費性向 β は正という結論になる。

   (e) $\beta > 0$ を統計的に示したが，本当は $\beta < 1$ も示すべきである。すなわち，H_0 : $\beta = 1$，H_1 : $\beta \neq 1$ も検定すべきである。(省略)

   (f) 基礎消費は正となるべきなので，経済理論と矛盾する。

   (g) 次に行うべき分析は，なぜ矛盾したかを追求すること。
   $\Longrightarrow$ 最初に考えた理論が間違っていた，構造変化のためだった，推定式が最小二乗法の仮定を満たしていなかった，$\cdots\cdots$

3. $s = 4557.04$ は，誤差項 u_i の標準偏差 σ^2 の推定値 (すなわち，回帰の標準誤差) である。
4. 自由度修正済み決定係数は $\overline{R}^2 = 0.992102$ であり，非常に 1 に近い値が得られたことから，消費と所得の間の関係を表す回帰式の当てはまりは非常に良いと言える。
5. DW について，$n = 27, k = 2$ の 5% 点の値は $dl = 1.32, du = 1.47$ であるので，5% で，

   (a) $DW < 1.32$ のとき，誤差項に正の系列相関がある。

   (b) $1.32 \le DW < 1.47$ のとき，判定不能。

   (c) $1.47 \le DW < 2.53$ のとき，誤差項に系列相関はない。

   (d) $2.53 \le DW < 2.68$ のとき，判定不能。

   (e) $2.68 \le DW$ のとき，誤差項に負の系列相関がある。

   となる。

   この場合，$DW = 0.289838$ なので，誤差項に正の系列相関が見られる。

   $\Longrightarrow$ 最小二乗法の仮定を満たしていない。

   $\Longrightarrow$ $t(25)$ 分布を検定に使うことができないので，今までの検定結果は間違っている可能性がある。

次に，誤差項に系列相関 (一階の自己相関) があるモデル

$$C_i = \alpha + \beta Y_i + u_i,$$
$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i,$$

の推定を行う。ただし，ϵ_i は互いに独立に正規分布するものと仮定する。

ρ の推定値 $\hat{\rho}$ は，最小二乗法の推定結果の DW を用いて，$\hat{\rho} = 1 - \dfrac{DW}{2} = 1 - \dfrac{.2898375}{2} = .855081$ を得る。データを，次のように変換する。

$$C_i^* = C_i - \hat{\rho} C_{i-1},$$
$$Y_i^* = Y_i - \hat{\rho} Y_{i-1},$$

そして，

$$C_i^* = \alpha' + \beta Y_i^* + \epsilon_i, \qquad \epsilon_i \sim N(0, \sigma_\epsilon^2),$$

を推定する。ただし，$\alpha' = \alpha(1-\rho)$ に注意。

結果は，以下の通りとなる。

$$C_i^* = \underset{(2183.63)}{-3679.78} + \underset{(.054012)}{.930350}\ Y_i^*,$$

$$R^2 = .922288, \quad \overline{R}^2 = .919180,$$

$$s = 2232.08, \quad DW = 1.35684,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は，係数推定値の標準誤差を表すものとする。

1. この場合，データ数は 26，推定すべきパラメータ数は 2 なので，自由度は $26 - 2 = 24$ となる。

2. 基礎消費の推定値 $\hat{\alpha}$ は，$\hat{\alpha} = \dfrac{\hat{\alpha}'}{1-\hat{\rho}}$ によって求められ，$\dfrac{-3679.78}{1-.855081} = -25392.0$ で負，限界消費性向の推定値 $\hat{\beta}$ は .930350 で正となる。

3. 真の基礎消費の符号を統計的に調べる。基礎消費 α の符号は α' の符号と同じなので，α' の符号を $\hat{\alpha}'$ から調べる。

   有意水準 0.05 のとき，

   $$\frac{-3679.78}{2183.63} = -1.685 > -t_{0.025}(24) = -2.064,$$

   となり，α' が負だとは言えない。

4. α は正の可能性もある。

5. したがって，推定結果から，最初に考えた理論モデルが間違っているとは言えない。

6. β について，有意水準 0.05 のとき，

$$\frac{.930350}{.054012} = 17.225 > t_{0.025}(24) = 2.064,$$

となり，統計的に有意である。

7. $s = 2232.08$ は，誤差項 ϵ_i の標準偏差 σ_ϵ^2 の推定値 (すなわち，回帰の標準誤差) である。

8. 自由度修正済み決定係数 $\overline{R}^2$ について，最初の推定結果では 0.992102 となり，今回の推定結果では .919180 と小さくなっている。

   $\Longrightarrow$ 「回帰式の当てはまりが悪くなった」と考えるのは間違い。

   被説明変数の値自体が，最初の推定結果と今回のものとでは異なるため，$\overline{R}^2$ の比較は不適当。

   $\Longrightarrow$ 回帰の標準誤差 (4557.04 と 2232.08) で比較すべき。後者の方が小さいため，後者の方が回帰式の当てはまりは良いと言える。

9. DW も 1.35684 となり，$1.32 \le DW < 1.47$ であるので，系列相関の有無を判定できない。

   $\Longrightarrow$ 「明らかに誤差項に系列相関がある」とは言えない。

   $\Longrightarrow$ この式で，信頼区間，仮説検定を行うべき。

● Stata による出力結果

データは，

`http://www2.econ.osaka-u.ac.jp/~tanizaki/class/2011/econome/cons.csv`

からダウンロード可

```
------------------------------------------------------------


. tsset year
        time variable:  year, 1970 to 1996
                delta:  1 unit

. gen ryd=yd/(pcons/100)

. gen rcons=cons/(pcons/100)

. reg rcons ryd

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      27
-------------+------------------------------           F(  1,    25) = 3267.05
       Model |  6.7845e+10     1  6.7845e+10           Prob > F      =  0.0000
    Residual |   519164248    25  20766569.9           R-squared     =  0.9924
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9921
       Total |  6.8365e+10    26  2.6294e+09           Root MSE      =    4557

------------------------------------------------------------------------------
       rcons |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         ryd |   .9335422   .0163326    57.16   0.000     .8999045    .9671799
       _cons |  -23216.75   3844.539    -6.04   0.000    -31134.72   -15298.77
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  2,    27) =  .2898375

. gen rho=1-0.5*.2898375

. gen drcons=rcons-rho*l.rcons
(1 missing value generated)

. gen dryd=ryd-rho*l.ryd
(1 missing value generated)

. reg drcons dryd

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      26
-------------+------------------------------           F(  1,    24) =  261.29
       Model |  1.3558e+09     1  1.3558e+09           Prob > F      =  0.0000
    Residual |   124530197    24  5188758.21           R-squared     =  0.9159
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9124
       Total |  1.4803e+09    25    59212957           Root MSE      =  2277.9

------------------------------------------------------------------------------
      drcons |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        dryd |   .9315055   .0576262    16.16   0.000     .8125708     1.05044
       _cons |  -3731.757   2353.261    -1.59   0.126    -8588.649    1125.134
------------------------------------------------------------------------------


. reg rcons ryd if year>1970.5

      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        26
-------------+----------------------------------   F(1, 24)        =   3413.32
       Model |  6.0715e+10         1  6.0715e+10   Prob > F        =    0.0000
    Residual |   426906784        24  17787782.7   R-squared       =    0.9930
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.9927
       Total |  6.1142e+10        25  2.4457e+09   Root MSE        =    4217.6

------------------------------------------------------------------------------
       rcons |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         ryd |   .9468539   .0162067    58.42   0.000      .913405    .9803029
       _cons |  -26656.25   3865.395    -6.90   0.000    -34634.03   -18678.47
------------------------------------------------------------------------------

. ivregress 2sls rcons (ryd = year l.rcons) if year>1970.5
```

```
Instrumental variables (2SLS) regression          Number of obs   =         26
                                                  Wald chi2(1)    =    3699.06
                                                  Prob > chi2     =     0.0000
                                                  R-squared       =     0.9930
                                                  Root MSE        =     4058.7

------------------------------------------------------------------------------
       rcons |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         ryd |   .9513737   .0156425    60.82   0.000      .920715    .9820324
       _cons |  -27709.28    3730.32    -7.43   0.000    -35020.58   -20397.99
------------------------------------------------------------------------------
Instrumented:  ryd
Instruments:   year L.rcons
```

途中で，
$\mathrm{DRCONS}_i = \mathrm{RCONS}_i - \hat{\rho}\,\mathrm{RCONS}_{i-1}$
$\mathrm{DRY}_i = \mathrm{RY}_i - \hat{\rho}\,\mathrm{RY}_{i-1}$
として，データをの変換 (ただし，$\hat{\rho} = 1 - .5DW = 1 - .5 \times .2898375$)

通常の最小二乗法と二段階最小二乗法の比較

```
. reg rcons ryd if year>1970.5
. ivregress 2sls rcons (ryd = year l.rcons) if year>1970.5
```

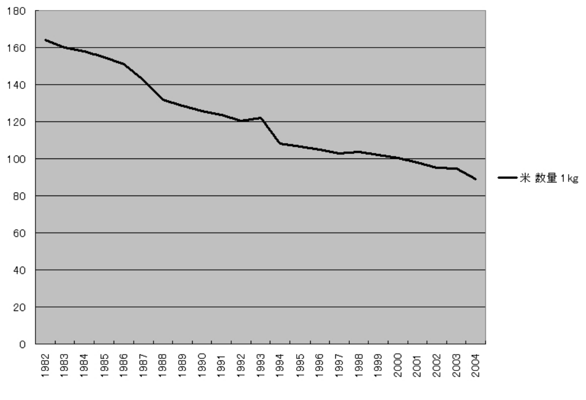
9.6.2 ミクロの消費関数（需要関数）

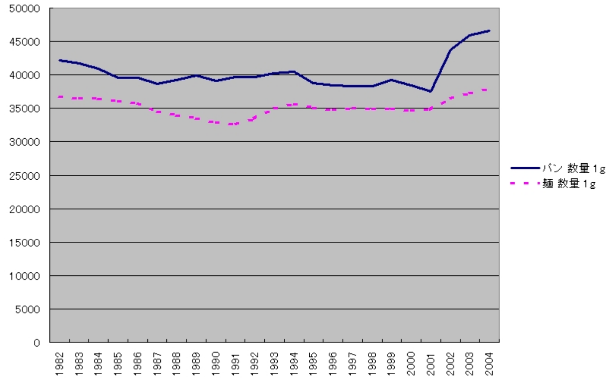
米，パン，麺の選択を考える。

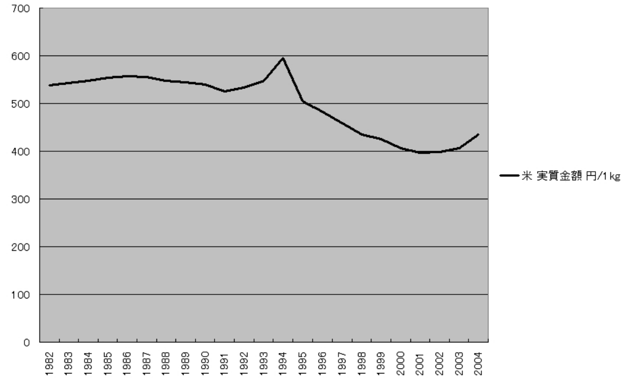
1 世帯当たり年間の品目別支出金額，購入数量
及び平均価格（全世帯・勤労者世帯）

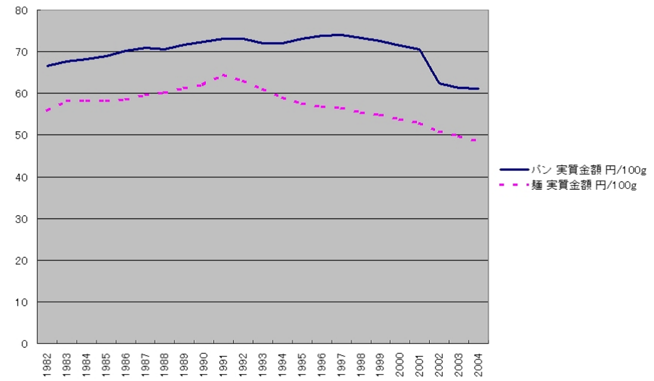
年	米		パン		麺		総支出額	消費者物価指数
	数量	金額	数量	金額	数量	金額		
	1kg	1kg	1g	100g	1g	100g		(全国総合)
i	Q_{1i}	P_{1i}	Q_{2i}	P_{2i}	Q_{3i}	P_{3i}	E_i	P_i
1982	164.22	435.98	42161	54.04	36854	45.32	3038024	0.811
1983	160.14	448.20	41745	55.88	36492	47.97	3114247	0.825
1984	158.06	461.69	40890	57.62	36500	49.21	3195829	0.844
1985	154.51	477.41	39545	59.42	36099	50.20	3277373	0.861
1986	150.96	482.80	39532	60.86	35859	50.74	3316493	0.867
1987	142.60	482.67	38710	61.53	34576	51.83	3371326	0.868
1988	132.04	478.40	39218	61.75	33971	52.65	3493468	0.874
1989	128.40	486.37	39927	63.99	33603	54.71	3592205	0.893
1990	125.78	497.33	39157	66.71	32890	57.14	3734084	0.921
1991	123.82	499.36	39659	69.57	32615	61.44	3925358	0.951
1992	120.58	516.05	39697	70.75	33401	61.06	4003931	0.967
1993	121.93	536.85	40209	70.51	35085	59.80	4022955	0.979
1994	107.99	587.50	40458	71.08	35760	58.37	4006086	0.986
1995	106.42	496.64	38766	71.97	35096	56.77	3948741	0.985
1996	104.91	476.26	38436	72.74	34804	55.90	3946187	0.986
1997	102.81	460.70	38333	74.39	35061	56.77	3999759	1.004
1998	103.53	439.24	38287	74.10	34956	55.98	3938235	1.010
1999	101.99	427.60	39246	73.00	34963	55.37	3876091	1.007
2000	100.40	406.82	38480	71.47	34722	53.83	3805600	1.000
2001	97.83	394.67	37554	70.12	34753	52.52	3704298	0.993
2002	95.15	391.28	43727	61.34	36493	50.11	3673550	0.984
2003	94.83	398.37	45876	60.12	37302	48.93	3631473	0.981
2004	89.02	426.12	46653	59.92	37957	47.72	3650436	0.981

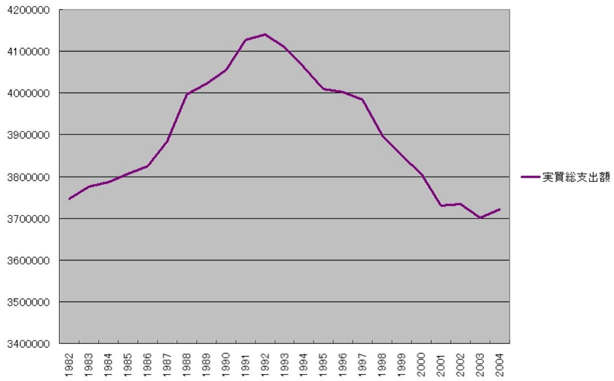
出所：『消費者物価指数年報 (平成 16 年)』(日本銀行) ← P_i
『家計調査年報 (平成 16 年)』(総務省統計局) ← その他




パン 数量 1g
麺 数量 1g


米 実質金額 円/1kg


パン 実質金額 円/100g
麺 実質金額 円/100g



●線型関数

$$Q_{1i} = \underset{(8.89)}{397.0} - \underset{(9.35)}{0.00018}\frac{E_i}{P_i} + \underset{(4.39)}{0.194}\frac{P_{1i}}{P_i} + \underset{(0.29)}{0.184}\frac{P_{2i}}{P_i} + \underset{(5.57)}{5.614}\frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 6.86,\quad R^2 = 0.932,\quad \overline{R}^2 = 0.917,\quad DW = 1.532$$

$$Q_{2i} = \underset{(13.9)}{61946.7} + \underset{(4.62)}{0.00893}\frac{E_i}{P_i} + \underset{(0.91)}{4.014}\frac{P_{1i}}{P_i} - \underset{(11.4)}{710.4}\frac{P_{2i}}{P_i} - \underset{(1.51)}{152.5}\frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 685.1,\quad R^2 = 0.931,\quad \overline{R}^2 = 0.915,\quad DW = 1.334$$

$$Q_{3i} = \underset{(16.9)}{56642.5} - \underset{(0.67)}{0.00098}\frac{E_i}{P_i} + \underset{(5.40)}{17.9}\frac{P_{1i}}{P_i} - \underset{(1.04)}{48.8}\frac{P_{2i}}{P_i} - \underset{(5.32)}{403.6}\frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 515.7,\quad R^2 = 0.885,\quad \overline{R}^2 = 0.860,\quad DW = 1.044$$

●対数線型

$$
\begin{aligned}
\log Q_{1i} = &\underset{(10.4)}{70.9} - \underset{(10.4)}{5.35} \log\frac{E_i}{P_i} + \underset{(4.53)}{0.705} \log\frac{P_{1i}}{P_i} \\
&- \underset{(0.06)}{0.018} \log\frac{P_{2i}}{P_i} + \underset{(6.46)}{2.68} \log\frac{P_{3i}}{P_i}
\end{aligned}
$$

$s = 0.048,\quad R^2 = 0.949,\quad \overline{R}^2 = 0.937,\quad DW = 1.713$

$$
\begin{aligned}
\log Q_{2i} = &\underset{(1.88)}{4.35} + \underset{(4.33)}{0.753} \log\frac{E_i}{P_i} + \underset{(1.21)}{0.063} \log\frac{P_{1i}}{P_i} \\
&- \underset{(10.9)}{1.135} \log\frac{P_{2i}}{P_i} - \underset{(1.31)}{0.184} \log\frac{P_{3i}}{P_i}
\end{aligned}
$$

$s = 0.016,\quad R^2 = 0.931,\quad \overline{R}^2 = 0.916,\quad DW = 1.317$

$$
\begin{aligned}
\log Q_{3i} = &\underset{(6.87)}{14.5} - \underset{(1.19)}{0.188} \log\frac{E_i}{P_i} + \underset{(5.51)}{0.266} \log\frac{P_{1i}}{P_i} \\
&- \underset{(0.27)}{0.025} \log\frac{P_{2i}}{P_i} - \underset{(5.30)}{0.682} \log\frac{P_{3i}}{P_i}
\end{aligned}
$$

$s = 0.015,\quad R^2 = 0.883,\quad \overline{R}^2 = 0.856,\quad DW = 1.067$

●対数線型 (変数を減らす)

$$
\begin{aligned}
\log Q_{1i} = &\underset{(10.9)}{70.9} - \underset{(11.2)}{5.36} \log\frac{E_i}{P_i} + \underset{(5.23)}{0.709} \log\frac{P_{1i}}{P_i} \\
&+ \underset{(7.69)}{2.67} \log\frac{P_{3i}}{P_i}
\end{aligned}
$$

$s = 0.047,\quad R^2 = 0.949,\quad \overline{R}^2 = 0.941,\quad DW = 1.724$

$$
\begin{aligned}
\log Q_{3i} = &\underset{(7.24)}{14.7} - \underset{(1.35)}{0.200} \log\frac{E_i}{P_i} + \underset{(6.45)}{0.271} \log\frac{P_{1i}}{P_i} \\
&- \underset{(6.49)}{0.700} \log\frac{P_{3i}}{P_i}
\end{aligned}
$$

$s = 0.014,\quad R^2 = 0.882,\quad \overline{R}^2 = 0.863,\quad DW = 1.122$

● Stata による出力結果

データは，

http://www2.econ.osaka-u.ac.jp/~tanizaki/class/2011/econome/demand.csv

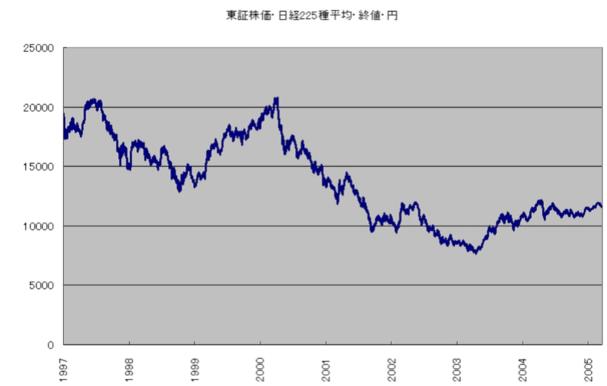
からダウンロード可

```
---------------------------------------------------------

. tsset year
        time variable:  year, 1982 to 2004
                delta:  1 unit

. gen re=e/p

. gen rp1=p1/p

. gen rp2=p2/p

. gen rp3=p3/p

. reg q1 re rp1 rp2 rp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  4,    18) =   62.32
       Model |  11605.1437     4  2901.28592           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  837.923294    18  46.5512941           R-squared     =  0.9327
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9177
       Total |   12443.067    22  565.593953           Root MSE      =  6.8229

------------------------------------------------------------------------------
          q1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          re |  -.0001813   .0000192    -9.43   0.000    -.0002217   -.0001409
         rp1 |   .1935249    .043943     4.40   0.000      .101204    .2858457
         rp2 |   .1825145    .621349     0.29   0.772    -1.122891     1.48792
         rp3 |   5.623917   1.003036     5.61   0.000     3.516618    7.731217
       _cons |   397.3071   44.31083     8.97   0.000     304.2135    490.4007
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  5,    23) =  1.538178

. reg q2 re rp1 rp2 rp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  4,    18) =   60.62
       Model |   113479303     4  28369825.8           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  8424108.48    18  468006.027           R-squared     =  0.9309
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9155
       Total |   121903412    22  5541064.17           Root MSE      =  684.11

------------------------------------------------------------------------------
          q2 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          re |   .0089294   .0019288     4.63   0.000      .004877    .0129817
         rp1 |   3.975941   4.406052     0.90   0.379     -5.28083    13.23271
         rp2 |  -710.4687   62.30106   -11.40   0.000    -841.3584   -579.5791
         rp3 |  -152.1237   100.5718    -1.51   0.148    -363.4172    59.16979
       _cons |   61930.62   4442.933    13.94   0.000     52596.36    71264.87
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  5,    23) =  1.340373

. reg q3 re rp1 rp2 rp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
```

```
-------------+------------------------------           F(  4,    18) =   34.82
       Model |  37006848.3     4  9251712.07           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  4782689.62    18  265704.979           R-squared     =  0.8856
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.8601
       Total |  41789537.9    22  1899524.45           Root MSE      =  515.47

------------------------------------------------------------------------------
          q3 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          re |    -.00097   .0014534    -0.67   0.513    -.0040234    .0020834
         rp1 |   17.89258    3.31989     5.39   0.000     10.91775    24.86741
         rp2 |  -48.87487   46.94286    -1.04   0.312    -147.4982    49.74843
         rp3 |  -403.4164   75.77925    -5.32   0.000    -562.6227   -244.2101
       _cons |   56606.16   3347.679    16.91   0.000     49572.95    63639.37
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  5,    23) =  1.047824

. gen lq1=log(q1)

. gen lq2=log(q2)

. gen lq3=log(q3)

. gen lre=log(re)

. gen lrp1=log(rp1)

. gen lrp2=log(rp2)

. gen lrp3=log(rp3)

. reg lq1 lre lrp1 lrp2 lrp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  4,    18) =   84.42
       Model |  .766574852     4  .191643713           Prob > F      =  0.0000
    Residual |   .04086074    18  .002270041           R-squared     =  0.9494
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9381
       Total |  .807435592    22  .036701618           Root MSE      =  .04764

------------------------------------------------------------------------------
         lq1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         lre |  -5.355623   .5092073   -10.52   0.000    -6.425428   -4.285818
        lrp1 |   .7030891   .1547336     4.54   0.000     .3780058    1.028172
        lrp2 |    -.01919   .3056177    -0.06   0.951    -.6612689     .622889
        lrp3 |   2.687511   .4126367     6.51   0.000     1.820594    3.554429
       _cons |   70.90628    6.78413    10.45   0.000     56.65335    85.15921
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  5,    23) =  1.720916

. reg lq2 lre lrp1 lrp2 lrp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  4,    18) =   61.41
       Model |  .064720875     4  .016180219           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  .004742568    18  .000263476           R-squared     =  0.9317
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9166
       Total |  .069463442    22  .003157429           Root MSE      =  .01623

------------------------------------------------------------------------------
         lq2 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         lre |   .7530252   .1734795     4.34   0.000     .3885582    1.117492
        lrp1 |   .0633603   .0527155     1.20   0.245    -.0473909    .1741114
        lrp2 |  -1.135159   .1041195   -10.90   0.000    -1.353906   -.9164119
        lrp3 |  -.1838809   .1405793    -1.31   0.207    -.4792271    .1114654
       _cons |   4.346289   2.311255     1.88   0.076    -.5094776    9.202055
```

```
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  5,    23) =  1.323931

. reg lq3 lre lrp1 lrp2 lrp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  4,    18) =   33.83
       Model |  .029851208     4  .007462802           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  .003971008    18  .000220612           R-squared     =  0.8826
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.8565
       Total |  .033822216    22  .001537373           Root MSE      =  .01485

------------------------------------------------------------------------------
         lq3 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         lre |  -.1868154    .158742    -1.18   0.255      -.52032    .1466892
        lrp1 |   .2652044   .0482372     5.50   0.000     .1638618     .366547
        lrp2 |  -.0255097   .0952743    -0.27   0.792    -.2256736    .1746542
        lrp3 |  -.6819342   .1286368    -5.30   0.000      -.95219   -.4116784
       _cons |   14.52537   2.114908     6.87   0.000     10.08212    18.96863
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  5,    23) =  1.071649

. reg lq1 lre lrp1 lrp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  3,    19) =  118.79
       Model |  .766565902     3  .255521967           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  .040869691    19  .002151036           R-squared     =  0.9494
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9414
       Total |  .807435592    22  .036701618           Root MSE      =  .04638

------------------------------------------------------------------------------
         lq1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         lre |  -5.364744   .4750821   -11.29   0.000    -6.359103   -4.370386
        lrp1 |   .7074307   .1347484     5.25   0.000      .425399    .9894623
        lrp3 |    2.67427    .345262     7.75   0.000     1.951629    3.396912
       _cons |   70.98983    6.47565    10.96   0.000     57.43613    84.54352
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  4,    23) =  1.733124

. reg lq3 lre lrp1 lrp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  3,    19) =   47.40
       Model |  .029835392     3  .009945131           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  .003986824    19  .000209833           R-squared     =  0.8821
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.8635
       Total |  .033822216    22  .001537373           Root MSE      =  .01449

------------------------------------------------------------------------------
         lq3 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         lre |  -.1989407   .1483821    -1.34   0.196     -.509508    .1116267
        lrp1 |   .2709758   .0420859     6.44   0.000      .182889    .3590625
        lrp3 |  -.6995357   .1078355    -6.49   0.000     -.925238   -.4738335
       _cons |   14.63644   2.022536     7.24   0.000     10.40322    18.86965
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  4,    23) =  1.127541
```

9.6.3 株価，金利，為替レート



$$\text{Kabu}_i = -\underset{(2.58)}{1883.1} + \underset{(8.27)}{46.3}\ \text{ExRate}_i + \underset{(51.7)}{6802.6}\ R_i$$

$$s = 2309.9, \quad R^2 = 0.570, \quad \overline{R}^2 = 0.570, \quad DW = 0.021$$

$$\text{Kabu}_i = -\underset{(0.03)}{2.36} + \underset{(0.31)}{0.164}\ \text{ExRate}_i + \underset{(1.96)}{36.5}\ R_i + \underset{(482)}{0.995}\ \text{Kabu}_{i-1}$$

$$s = 214.8, \quad R^2 = 0.996, \quad \overline{R}^2 = 0.996, \quad DW = 2.100$$

$$\Delta\text{Kabu}_i = \underset{(0.119)}{8.11} - \underset{(0.173)}{0.091}\ \text{ExRate}_i - \underset{(0.070)}{0.862}\ R_i$$

$$s = 215.1, \quad R^2 = 0.000015, \quad \overline{R}^2 = -0.00097, \quad DW = 2.106$$

● Stata による出力結果

データは,

`http://www2.econ.osaka-u.ac.jp/~tanizaki/class/2011/econome/nikkei.csv`

からダウンロード可

```
-----------------------------------------------------------


. gen time=_n

. tsset time
        time variable:  time, 1 to 2028
                delta:  1 unit

. reg kabu exrate r

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    2028
-------------+------------------------------           F(  2,  2025) = 1341.74
       Model |  1.4318e+10     2  7.1590e+09           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  1.0805e+10  2025  5335630.99           R-squared     =  0.5699
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.5695
       Total |  2.5123e+10  2027  12394036.8           Root MSE      =  2309.9

------------------------------------------------------------------------------
        kabu |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      exrate |   46.30522   5.601817     8.27   0.000      35.3193    57.29115
           r |    6802.61   131.6017    51.69   0.000     6544.521    7060.699
       _cons |  -1883.071    730.508    -2.58   0.010    -3315.696   -450.4449
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  3,  2028) =   .021141
```

```
. reg kabu exrate r l.kabu

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    2027
-------------+------------------------------           F(  3,  2023) =       .
       Model |  2.4997e+10     3  8.3323e+09           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  93298782.6  2023  46119.0225           R-squared     =  0.9963
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9963
       Total |  2.5090e+10  2026  12384078.2           Root MSE      =  214.75

------------------------------------------------------------------------------
        kabu |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      exrate |   .1643596   .5295945     0.31   0.756    -.8742481    1.202967
           r |   36.51834    18.6521     1.96   0.050     -.060989    73.09767
             |
        kabu |
         L1. |   .9945113    .002064   481.84   0.000     .9904636     .998559
             |
       _cons |  -2.359124   68.05383    -0.03   0.972     -135.822    131.1038
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  4,  2027) =  2.100248

. reg dkabu exrate r if tin(2,2028)

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    2027
-------------+------------------------------           F(  2,  2024) =    0.02
       Model |  1443.23541     2  721.617703           Prob > F      =  0.9845
    Residual |  93624927.9  2024  46257.3754           R-squared     =  0.0000
-------------+------------------------------           Adj R-squared = -0.0010
       Total |  93626371.1  2026   46212.424           Root MSE      =  215.08

------------------------------------------------------------------------------
       dkabu |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      exrate |  -.0906022   .5216244    -0.17   0.862    -1.113579    .9323746
           r |  -.8624553   12.27849    -0.07   0.944    -24.94225    23.21734
       _cons |   8.109931    68.0417     0.12   0.905    -125.3291     141.549
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  3,  2027) =  2.106308
```