計量経済

エコノメトリックス

(火1，木2)

「計量経済」は，「統計」(経済学部 2 年生以上対象) の内容を前提とします。
ただし，必要ならば，復習しながら授業を進めていきます。

- 教科書 『計量経済学』(山本拓著，1995，新世社)
  —→ 数値例は変えますが，内容はこの教科書に沿って授業を進めます。

- 参考書 『基本統計学 (第 3 版)』(豊田他著，東洋経済新報社，2010 年)
  —→ 統計学の復習として，この本を参考にします。
  内容は『コア・テキスト　統計学』（大屋著）と同じです。

講義ノート等の資料は，
http://www2.econ.osaka-u.ac.jp/~tanizaki/class/2020/index.htm
に掲載します。

目次

第1章　計量経済学とは？

計量経済学とはどのような学問か。

経済学には，ミクロ経済学，マクロ経済学，財政学，金融論，国際経済学，公共経済学，労働経済学，産業組織論など様々な分野がある。それぞれの分野には様々な経済理論が含まれる。

他方，国内総生産（GDP），消費，投資，金利，為替レート，株価などの様々なデータが利用可能となっている。

計量経済学とは，経済理論が現実に成り立つものかどうかを，データを用いて，統計的に検証するというものである。

いくつかの例を見てみよう。

1.1　需要関数の例

経済学部の初年度のミクロ経済学の授業では，需要関数を学ぶ。ある仮定に基づいて効用関数を設定して，予算制約式のもとで効用関数が最大となるような財の組み合わせを求める

というものが基本的な考え方である。したがって，ある財の需要関数は所得と他の財も含めた価格の関数となることが導かれる。

簡単化のために，財 1，財 2 の 2 つの財のみを考えることにする。このとき，財 1 の需要 Q_1 は所得 Y，財 1 の価格 P_1，財 2 の価格 P_2 に依存する。すなわち，

$$Q_1 = f(Y, P_1, P_2)$$

と書ける。$f(Y, P_1, P_2)$ は Y，P_1，P_2 の関数という意味である。

$f(Y, P_1, P_2)$ は，どのような効用関数を仮定するかによって，自動的に決まる関数であるが，仮に関数 f を線形関数とすると，

$$Q_1 = \beta_0 + \beta_1 Y + \beta_2 P_1 + \beta_3 P_2$$

となる。β_0，β_1，β_2，β_3 はパラメータと呼ばれるものであり，計量経済学では，$(Q_1$，Y，P_1，$P_2)$ のデータを用いて，これらを推定する。

特殊な財を除いて，通常は，所得が増えれば財をより多く購入するということなので，β_1 は正となることが予想される。

同様に，財 1 の価格が上昇すればその財を買うのを控えるということが予想されるため，通常，β_2 は負となる。

β_3 に関しては，財 1 と財 2 の関係から，正にも負にもなり得る。

財 1 と財 2 が代替的である場合，すなわち，財 2 は財 1 の代わりになるような場合（例えば，米とパン），財 2 の価格が上昇すれば財 2 の需要量は減り，代わりに財 1 の需要を増やすということになり，β_3 は正となる。

また，財 1 と財 2 が補完的である場合，すなわち，財 2 は財 1 と一緒に用いるような場合（例えば，パンとバター），財 2 の価格が上昇すれば財 2 の需要量は減り，同時に財 1 の需要も減るということになり，β_3 は負となる。

例（効用関数の特定化）：　簡単化のために，2 つの財を考える。

コブ・ダグラス型の効用関数を仮定する。

この効用関数と合わせて，予算制約式は次のように書かれる。

効用関数：　$u(Q_1, Q_2) = Q_1^{\alpha} Q_2^{\beta}$

予算制約式：　$Y = P_1 Q_1 + P_2 Q_2$

効用関数 $u(Q_1, Q_2)$ は，通常，それぞれの財について，

(i) 需要量が増えれば効用が増える（一階微分は正），

(ii) 限界効用は逓減する（二階微分は負）

という仮定を置くことが多い。

すなわち，

$$\frac{\partial u(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1} = \alpha Q_1^{\alpha-1} Q_2^{\beta} > 0 \quad \longrightarrow \quad \text{仮定 (i)}$$

$$\frac{\partial^2 u(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1^2} = \alpha(\alpha-1) Q_1^{\alpha-2} Q_2^{\beta} < 0 \quad \longrightarrow \quad \text{仮定 (ii)}$$

$$\frac{\partial u(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2} = \beta Q_1^{\alpha} Q_2^{\beta-1} > 0 \quad \longrightarrow \quad \text{仮定 (i)}$$

$$\frac{\partial^2 u(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2^2} = \beta(\beta-1) Q_1^{\alpha} Q_2^{\beta-2} < 0 \quad \longrightarrow \quad \text{仮定 (ii)}$$

が導かれ，$0 < \alpha < 1$，$0 < \beta < 1$ が得られる。ただし，需要量は正を仮定している（すなわち，$Q_1 > 0$，$Q_2 > 0$）。

　また，仮定 (ii) は，需要量 Q_1，Q_2 をともに t 倍 $(t > 1)$ すれば，効用は t 倍より小さくなることを意味する。

　したがって，$t > 1$ について，

$$u(tQ_1, tQ_2) < tu(Q_1, Q_2) \quad \longrightarrow \quad \text{仮定 (ii)}$$

となる。

　左辺は $u(tQ_1, tQ_2) = t^{\alpha+\beta}Q_1^{\alpha}Q_2^{\beta} = t^{\alpha+\beta}u(Q_1, Q_2)$ となる。

　よって，$t^{\alpha+\beta} < t$ から，$\alpha + \beta < 1$ が得られる。

予算制約式のもとで効用最大化問題を解く。

$$L = Q_1^{\alpha} Q_2^{\beta} + \lambda(Y - P_1 Q_1 - P_2 Q_2)$$

のラグランジェ関数 L を設定して，Q_1，Q_2，λ についてそれぞれ微分してゼロと置く（ラグランジェ未定乗数法と呼ばれる）。λ はラグランジェ乗数と呼ばれる。Q_1，Q_2，λ について，

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = \alpha Q_1^{\alpha-1} Q_2^{\beta} - \lambda P_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial Q_2} = \beta Q_1^{\alpha} Q_2^{\beta-1} - \lambda P_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = Y - P_1 Q_1 - P_2 Q_2 = 0$$

最初の 2 つの式から λ を消去して，$\beta Q_1 P_1 = \alpha Q_2 P_2$ が得られ，最後の 3 つ目の式を用いて，

需要関数 Q_1，Q_2 は

$$Q_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} Y P_1^{-1}, \qquad Q_2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta} Y P_2^{-1}$$

として得られる。

需要関数の推定の際には，対数を取って，

$$\log Q_1 = a_1 + a_2 \log Y + a_3 \log P_1, \qquad \log Q_2 = b_1 + b_2 \log Y + b_3 \log P_2$$

として，$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ を推定することになる。

ただし，$a_1 = \log \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} < 0$，$b_1 = \log \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} < 0$，$a_2 = b_2 = 1$，$a_3 = b_3 = -1$ となる。

したがって，推定した結果，$a_1 < 0$，$b_1 < 0$，$a_2 = b_2 = 1$，$a_3 = b_3 = -1$ が成り立つかどう

かを統計的に検定することになる。

また，二階の条件を求めるために，下記のように二階微分を求める。

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial L^2}{\partial Q_1^2} & \dfrac{\partial L^2}{\partial Q_1 \partial Q_2} \\ \dfrac{\partial L^2}{\partial Q_2 \partial Q_1} & \dfrac{\partial L^2}{\partial Q_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)Q_1^{\alpha-2}Q_2^{\beta} & \alpha\beta Q_1^{\alpha-1}Q_2^{\beta-1} \\ \beta\alpha Q_1^{\alpha-1}Q_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)Q_1^{\alpha}Q_2^{\beta-2} \end{pmatrix}$$

上記の最適解 Q_1，Q_2 のもとで，この行列が負値定符号行列であれば，効用関数が最大になっている。

負値定符号行列のためには，

$$\alpha(\alpha-1)Q_1^{\alpha-2}Q_2^{\beta} < 0, \qquad \beta(\beta-1)Q_1^{\alpha}Q_2^{\beta-2} < 0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1)Q_1^{\alpha-2}Q_2^{\beta} & \alpha\beta Q_1^{\alpha-1}Q_2^{\beta-1} \\ \beta\alpha Q_1^{\alpha-1}Q_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)Q_1^{\alpha}Q_2^{\beta-2} \end{vmatrix} = \alpha\beta(1-\alpha-\beta)Q_1^{2\alpha-2}Q_2^{2\beta-2} > 0$$

という条件となる。

したがって，効用関数の最大化が保証されるためには，α，β は $0 < \alpha < 1$，$0 < \beta < 1$，$\alpha + \beta < 1$ でなければならない。

この条件は，仮定 (i)，(ii) と同じものとなっている。

1.2　消費関数の例

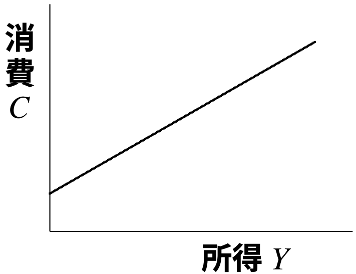
所得から税金を差し引いたものを可処分所得と呼ぶが，可処分所得 (Y) が増えれば消費 (C) も増える。

この関数を下記のように線形（一次式）によって表されると仮定しよう。

$$C = \beta_0 + \beta_1 Y$$

この場合，経済学では，β_0 は基礎消費，β_1 は限界消費性向と呼ばれる。

グラフに描くと下記のようになる。



切片 β_0 の基礎消費とは所得がなくても日常生活に最低限必要な消費（すなわち，衣食住宅費等）であり，傾き $\beta_0 > 0$ であることが予想される。

β_1 の限界消費性向とは，所得が 1 円増えれば消費はいくら増えるのかという指標である。所得が 1 円増えれば，一部，貯蓄に回すため，$0 < \beta_1 < 1$ となることが予想される。

β_0, β_1 は未知であるので，実際のデータを用いて求められる。

C や Y は個人個人のデータでも，国全体の国民所得統計でも構わない。

国民所得統計の場合は，C や Y は内閣府・経済社会総合研究所

`http://www.esri.go.jp/index.html`

の国民経済計算（GDP 統計）から「国内家計最終消費支出」,「家計国民可処分所得」という項目で，それぞれデータは公表されている。

また，関数形について，単純に，一次式としたが，

$$C = \beta_0 + \beta_1 Y^{\beta_2}$$

でも構わない。

$0 < \beta_0 + \beta_1$（$Y = 0$ の場合に対応する），$0 < \beta_1$ となるはずである。

この場合，限界消費性向は，

$$\frac{\mathbf{d}C}{\mathbf{d}Y} = \beta_1\beta_2 Y^{\beta_2 - 1}$$

となるので，$0 < \beta_1\beta_2 Y^{\beta_2 - 1} < 1$ となるべきである (通常，Y は正である)。

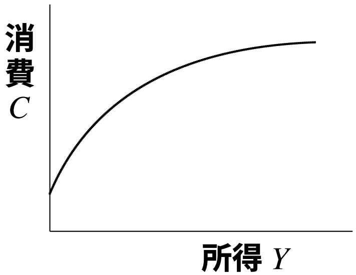
さらに，二階微分をとると，

$$\frac{\mathbf{d}^2C}{\mathbf{d}Y^2} = \beta_1\beta_2(\beta_2 - 1)Y^{\beta_2 - 2}$$

となる。

所得が増えるにしたがって，消費も増えるが，所得が増えるほどには消費は増えないと考えられるので，$\beta_1\beta_2(\beta_2-1)Y^{\beta_2-2}<0$ というのが現実的であるだろう。

グラフに描くと下記のようになる。



これらを総合すると，$0<\beta_0+\beta_1$，$0<\beta_1$，$0<\beta_2<1$ が予想される。

C，Y のデータから，β_0，β_1，β_2 を推定して，$0<\beta_0+\beta_1$，$0<\beta_1$，$0<\beta_2<1$ が成り立っているかどうかを統計的に確かめることになる。

1.3　生産関数の例

生産量の産出量と生産要素の投入量の関係を表す関数を，生産関数と呼ぶ。

マクロ経済学の分野では，資本 K と労働 L を投入すると産出量 Y（すなわち，GDP）が得られる。

$$Y = f(K, L)$$

通常は，投入量を増やせば産出量も増えるが，増やせば増やすほど産出量が同じ比率で増えるというものではない（規模に関する収穫逓減）という仮定を置くことになる。

● コブ・ダグラス型生産関数：　下記の生産関数はコブ・ダグラス型生産関数と呼ばれる。

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

A は技術進歩を表すパラメータ，α は労働分配率，β は資本分配率と呼ばれるパラメータである。

生産関数の仮定から，通常は $0 < \alpha < 1$，$0 < \beta < 1$ を満たさなければならない。

投入量をそれぞれ一定倍すると，産出量が増加・減少・一定かで，規模に関して収穫逓増・逓減・一定とそれぞれ呼ばれる。また，生産関数との関係は次のようになる。$t > 1$ について，

- 規模に関して収穫逓増：　$f(tK, tL) > tf(K, L)$
- 規模に関して収穫逓減：　$f(tK, tL) < tf(K, L)$

- **規模に関して収穫一定：** $f(tK, tL) = tf(K, L)$

特に，コブ・ダグラス型生産関数の場合，α**，**β **との関係は次のようになる。**

- **規模に関して収穫逓増：** $\alpha + \beta > 1$
- **規模に関して収穫逓減：** $\alpha + \beta < 1$
- **規模に関して収穫一定：** $\alpha + \beta = 1$

推定する際には，両辺に対数を取って，

$$\log Y = \gamma + \alpha \log K + \beta \log L$$

として，$\log Y$**，**$\log K$**，**$\log L$ **のデータを用いて，**γ**，**α**，**β **を推定することになる（ただし，**$\gamma = \log A$ **とする）。**

そして，規模に関して収穫逓増・逓減・一定のいずれかを，α と β との関係から，統計的に導き出すことできる。

● **CES 型生産関数 (Constant Elasticity of Substitution type production function)：** 下記の生産関数は CES 型生産関数と呼ばれる。

$$Y = \gamma\left(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right)^{-\mu/\rho}$$

γ は効率パラメータまたはスケール係数，ρ は代替パラメータ，δ は分配パラメータ，μ は規模の経済性パラメータと呼ばれる。

CES 型生産関数の場合，規模に関して収穫逓増・逓減・一定と μ との関係は次のようになる。

- 規模に関して収穫逓増： $\mu > 1$
- 規模に関して収穫逓減： $\mu < 1$
- 規模に関して収穫一定： $\mu = 1$

$\rho \longrightarrow 0$ のとき，CES 型生産関数はコブ・ダグラス型生産関数に一致する。

限界代替率（MRS，Marginal Rate of Substitution）とは，

$$\mathbf{MRS} = \frac{\mathbf{d}K}{\mathbf{d}L} = -\frac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K}$$

と定義される。

すなわち，限界代替率とは，生産量一定のもとで，労働を 1 単位変化させた時に資本を何単位変化させなければならないかを意味するものである。

代替の弾力性（Elasticity of Substitution）とは，

$$\frac{\mathbf{d}\,(L/K)/(L/K)}{\mathbf{d}\ \mathbf{MRS}/\mathbf{MRS}}$$

と定義され，限界代替率 1 パーセントの変化で，生産要素投入量比が何パーセント変化するかを示したものである。

コブ・ダグラス型生産関数の場合，代替の弾力性は 1 となるが，CES 型生産関数の場合，代替の弾力性は $1/(1+\rho)$ となる。

Y，K，L のデータを用いて，γ，ρ，δ，μ のパラメータを推定し，現実の経済状況を解釈することができる。

本章では，3 つの例を用いて，経済理論と計量経済との関係を示した。他にも様々な例を

考えることができる。計量経済学では，理論が現実的かどうかを検証する道具を学ぶことができると言っても差し支えない。

第2章　2変数間の関係

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$ の n 組のデータが観測されたとしよう。

i 番目に観測されたデータを (X_i, Y_i) とする。

2.1 準備：和記号 $\sum$ について

データとして，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ と $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ が利用できるとする。

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \cdots + X_n Y_n$

4. 定数 c について，

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + \cdots + c = nc$$

5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} cX_i = c\sum_{i=1}^{n} X_i$

6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$

7. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} X_iY_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$

8. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_iY_j = (\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{j=1}^{m} Y_j)$

記号が煩雑になり易いので，$i = 1$ と n を省略して，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ を $\displaystyle\sum_{i} X_i$，$\sum_i X_i$，$\sum X_i$ と表記することもよくある。

下記の例を考える。

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
X_i	**5**	**1**	**3**	**2**	**4**
Y_i	**2**	-1	-1	**1**	**2**

この場合，$n = 5$ となる。上記の足し算は，下記のように計算される。

1. $$\sum_{i=1}^{n} X_i = 5 + 1 + 3 + 2 + 4 = 15$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 2 - 1 - 1 + 1 + 2 = 3$$

3. $$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 5^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2 + 4^2 = 55$$

4. $$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = 5 \times 2 + 1 \times (-1) + 3 \times (-1) + 2 \times 1 + 4 \times 2 = 16$$

5. $\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i) = (5 + 2) + (1 - 1) + (3 - 1) + (2 + 1) + (4 + 2) = 17$

6. $\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i)^2 = (5 + 2)^2 + (1 - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (2 + 1)^2 + (4 + 2)^2 = 93$

統計学や計量経済学で，足し算記号を用いた頻繁に使われる公式を復習しよう。

2.2　標本平均

$\overline{X}$，$\overline{Y}$ を次のように定義する。

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$\overline{X}$，$\overline{Y}$ は，X の標本平均，Y の標本平均と呼ばれる。

2.3　標本分散

s_X^2，s_Y^2 を下記のように定義する。

$$s_X^2 = \frac{1}{n}\Big((X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{n}\Big((Y_1 - \overline{Y})^2 + (Y_2 - \overline{Y})^2 + \cdots + (Y_n - \overline{Y})^2\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$$

s_X^2，s_Y^2 は，X の標本分散，Y の標本分散と呼ばれる。

統計学では，n の代わりに，$n-1$ で割ったものがよく使われる。この場合，標本不変分散と呼ばれる。

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ は次のように変形される。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2\overline{X}X_i+\overline{X}^2) = \sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\overline{X}^2+n\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\end{aligned}$$

3 つ目の等号は，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i=n\overline{X}$ が利用されている。この変形はよく使われる。

両辺を n で割って，

$$s_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$$

となる。

2.4　標本共分散

s_{XY} を次のように定義する。

$$\begin{aligned} s_{XY} &= \frac{1}{n}\Big((X_1 - \overline{X})(Y_1 - \overline{Y}) + (X_2 - \overline{X})(Y_2 - \overline{Y}) + \cdots + (X_n - \overline{X})(Y_n - \overline{Y})\Big) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) \end{aligned}$$

s_{XY} は標本共分散と呼ばれる。

$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$ は次のように変形される。

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) &= \sum_{i=1}^{n}(X_iY_i - \overline{X}Y_i - \overline{Y}X_i + \overline{X}\overline{Y}) = \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - \overline{X}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \overline{Y}\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{X}\overline{Y} \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - n\overline{X}\overline{Y} - n\overline{Y}\overline{X} + n\overline{X}\overline{Y}) = \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - n\overline{X}\overline{Y}
\end{aligned}
$$

3 つ目の等式は，$n\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$，$n\overline{Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ が用いられている。

両辺を n で割って，

$$
s_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_iY_i - \overline{X}\overline{Y}
$$

となる。

　また，次のように書き直すことができる。

$$\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \sum(X_i - \overline{X})Y_i - \overline{Y}\sum(X_i - \overline{X}) = \sum(X_i - \overline{X})Y_i$$

3 つ目の等式は，$\sum(X_i - \overline{X}) = 0$ を利用している。

　同様に，

$$\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \sum(Y_i - \overline{Y})X_i$$

と書き換えることができる。

2.5 標本相関係数

(X_1, Y_1)，$(X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$ の n 組のデータが利用可能であるとする。

r を下記のように定義する。

$$r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}}$$

r は標本相関係数と呼ばれ，X と Y との関係を表す。

標本相関係数は，

$$-1 \leq r \leq 1$$

となる。

[証明]　次の関数 $f(t)$ を考える。

$$f(t) = \frac{1}{n}\Big(\big((X_1 - \overline{X})t - (Y_1 - \overline{Y})\big)^2 + \big((X_2 - \overline{X})t - (Y_2 - \overline{Y})\big)^2 + \cdots + \big((X_n - \overline{X})t - (Y_n - \overline{Y})\big)^2\Big)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big((X_i - \overline{X})t - (Y_i - \overline{Y})\big)^2$$

データ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ と $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ を与えたもとで，どの t についても $f(t) \geq 0$ が成り立つ。

なぜなら，2 乗の和を取っているからである。

$$f(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big((X_i - \overline{X})t - (Y_i - \overline{Y})\big)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big((X_i-\overline{X})^2t^2 - 2(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})t + (Y_i-\overline{Y})^2\Big) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2t^2 - 2t\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y}) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2 \\
&= s_X^2t^2 - 2s_{XY}t + s_Y^2 = (s_Xt - \frac{s_{XY}}{s_X})^2 + s_Y^2 - \frac{s_{XY}^2}{s_X^2} \\
&= (s_Xt - \frac{s_{XY}}{s_X})^2 + s_Y^2(1 - \frac{s_{XY}^2}{s_X^2s_Y^2}) = (s_Xt - \frac{s_{XY}}{s_X})^2 + s_Y^2(1-r^2)
\end{aligned}
$$

$f(t) \geq 0$ **なので，最後の等式の右辺第 2 項の括弧内の** $1 - r^2 \geq 0$ **とならなければならない。すなわち，**$-1 \leq r \leq 1$ **を得る。**

2.6　行列について

A を 2×2 行列とすると，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

と表される。

$a_{ij} = A$ の第 i 行，第 j 列の要素

a を 2×1 行列 (縦ベクトル) とすると，

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

と表される。

$a_i = a$ の第 i 要素

a を 1×2 行列 (横ベクトル) とすると，

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

と表される。

$a_i = a$ の第 i 要素

A を $n \times k$ 行列とすると，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

と表される。

$a_{ij} = A$ の第 i 行，第 j 列の要素 (ij 要素)

a を $n \times 1$ 行列 (縦ベクトル) とすると，

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と表される。

$a_i = a$ の第 i 要素

a を $1 \times k$ 行列 (横ベクトル) とすると，

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

と表される。

$a_i = a$ の第 i 要素

行列の等号： A，B を $n \times k$ 行列とする。$A = B$ は，すべての $i = 1, \cdots, n$，$j = 1, \cdots, k$ について，$a_{ij} = b_{ij}$ を意味する。ただし，a_{ij}，b_{ij} は，それぞれ，A，B の第 ij 要素とする。

$x = 3, y = 2$ の２つの等式を行列で表す。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$$

行列の和と差：　A, B を $n \times k$ 行列とする。

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1k} + b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nk} + b_{nk} \end{pmatrix}$$

すなわち，$A + B$ の第 ij 要素は，$a_{ij} + b_{ij}$ となる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

要素と行列の積： A **を** $n \times k$ **行列とする。**c **を スカラー** $(1 \times 1$ **行列のこと**$)$ **とする。**

$$cA = c\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & \cdots & ca_{nk} \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad c = 5 \quad$ **のとき**

$$cA = 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\times 1 & 5\times 2 \\ 5\times 3 & 5\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

行列と行列の積：　A, B **を** $n \times k$**，** $k \times n$ **行列とする。**

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{k} a_{1m}b_{m1} & \cdots & \sum_{m=1}^{k} a_{1m}b_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{m=1}^{k} a_{nm}b_{m1} & \cdots & \sum_{m=1}^{k} a_{1m}b_{mn} \end{pmatrix}$$

すなわち，AB **は** $n \times n$ **行列で，**AB **の** ij **要素は，**$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{m=1}^{k} a_{im}b_{mj}$ **となる。**

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{n} b_{1m}a_{m1} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} b_{1m}a_{mk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{m=1}^{n} b_{km}a_{m1} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} b_{1m}a_{mk} \end{pmatrix}$$

すなわち，BA は $k \times k$ 行列で，BA の第 ij 要素は，$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{in}a_{nj} = \sum_{m=1}^{n} b_{im}a_{mj}$ となる。

このように，AB と BA の次元は異なる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\times1+6\times3 & 5\times2+6\times4 \\ 7\times1+8\times3 & 7\times2+8\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

一般的に，$AB \neq BA$ となる。

c **をスカラーとする。**

$$cAB = AcB = (Ac)B = A(cB) = ABc$$

c **をどこで掛けても値は変わらない。**

連立方程式：

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$$

行列表示すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

となる。

また，

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \\ 9x + 10y + 11z = 12 \end{cases}$$

行列表示すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

となる。

単位行列：　単位行列とは，対角要素 1，その他 0 となる行列であり，I で表す。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I **が** $n \times n$ **行列のとき，**I_n **と書くことも多い。**

A **を** $n \times n$ **行列，**x **を** $n \times 1$ **行列 (ベクトル) とする。**

$$I_n A = A I_n = A \qquad I_n x = x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

逆行列： A **を** $n \times n$ **とする。**A **の逆行列とは，**$AB = I_n$ **または** $BA = I_n$ **となる** B **を指す。**A **も** B **も次元は同じ。**

B **を** A^{-1} **と表す。**

すなわち，A の逆行列は A^{-1} であり，A^{-1} の逆行列は A である。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のとき，

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。

$$A^{-1}A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -bc + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

連立方程式の解： A を $n \times n$ 行列，x と b を $n \times 1$ 行列 (ベクトル) とする。

$$Ax = b$$

両辺に A^{-1} を左から掛ける。

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$A^{-1}A = I_n$ なので，

$$I_n x = A^{-1}b$$

となる。また，

$$I_n x = x$$

なので，x を A, b で表すと，

$$x = A^{-1}b$$

となる。

例

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$$

の行列表示は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

となる。

x, y **の解は，**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

なので，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{1\times 5 - 2\times 4}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{1\times 3}\begin{pmatrix} 5\times 3 - 2\times 6 \\ -4\times 3 + 1\times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \\ 9x + 10y + 11z = 12 \end{cases}$$

の行列表示は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

となる。x, y, z の解は，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

となる。

転置行列： A を $n \times k$ 行列とする。

A の第 ij 要素を a_{ij} とする。

A の転置行列 A' (または ${}^{t}A$，${}^{T}A$) の第 ij 要素は，a_{ji} となる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

A' は $k \times n$ となる。

$$(A')' = A$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

転置行列の記号として，計量経済学では右肩に $'$ を使うことが多いが，他分野では左肩に ^{t} や ^{T} を付けることが多い。