5.3.4　$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分散

(* 復習) 分散：

a，b は定数

確率変数 X について，$\mathbf{V}(aX \pm b) = a^2\mathbf{V}(X)$

(* 復習) 確率変数の和の分散：

2 つの確率変数 X，Y について，

$\mathbf{V}(X \pm Y) = \mathbf{V}(X) \pm 2\mathbf{Cov}(X, Y) + \mathbf{V}(Y)$ となる。

特に，X と Y が独立の場合は，

$\mathbf{V}(X \pm Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ となる（独立であれば，$\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ に注意）。

●$\hat{\beta}$ の分散について，$\hat{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i$ を用いると，

$$\mathbf{V}(\hat{\beta}) = \mathbf{V}(\beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i) = \mathbf{V}(\sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\omega_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \mathbf{V}(u_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2$$
$$= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}$$

3 つ目の等号は，$\omega_i u_i$ を 1 つの確率変数とみなして，$\omega_1 u_1$，$\omega_2 u_2$，$\cdots$，$\omega_n u_n$ が互いに独立なので，成り立つ（すべての $i \neq j$ について，$\mathbf{Cov}(\omega_i u_i,\ \omega_j u_j) = \mathbf{E}(\omega_i \omega_j u_i u_j) = \omega_i \omega_j \mathbf{E}(u_i u_j) = 0$ となる）。

誤差項 (または，攪乱項) の仮定より，

$$\mathbf{V}(u_i) = \sigma^2,$$

が用いられる。

最後の行は，$\omega_i = \dfrac{X_i - \overline{X}}{\sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2}$ に注意して，

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\left(\sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{\left(\sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2\right)^2}$$
$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}$$

を用いる。同じ総和なので，添え字に関わらず，$\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2$ が成り立つことにに注意。

よって，$\hat{\beta}$ の平均は β，分散は $\sigma^2 \sum \omega_i^2 = \dfrac{\sigma^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$ となることが示された。

● $\hat{\alpha}$ の分散について，$\hat{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ を利用すると，

$$\mathbf{V}(\hat{\alpha}) = \mathbf{V}(\alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = \mathbf{V}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \mathbf{V}(u_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

3 つ目の等号は，$\lambda_i u_i$ を 1 つの確率変数とみなして，$\lambda_1 u_1$，$\lambda_2 u_2$，$\cdots$，$\lambda_n u_n$ が互いに独立なので，成り立つ（すべての $i \neq j$ について，$\mathbf{Cov}(\lambda_i u_i, \lambda_j u_j) = \mathbf{E}(\lambda_i \lambda_j u_i u_j) = \lambda_i \lambda_j \mathbf{E}(u_i u_j) = 0$ となる)。

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ は下記のように計算される。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{n} - \overline{X}\omega_i\Big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}\overline{X}\omega_i + \overline{X}^2 \omega_i^2\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}\overline{X} \sum_{i=1}^{n} \omega_i + \overline{X}^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \\
&= \frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + n\overline{X}^2}{n \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}
\end{aligned}
$$

2 行目から 3 行目では $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 0$**，3 行目から 4 行目では** $\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$**，最後の等式では** $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2$ **が使われている。**

したがって，$\mathbf{V}(\hat{\alpha})$ は，

$$\mathbf{V}(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}$$

となる。

よって，$\hat{\alpha}$ の平均は α，分散は $\sigma^2 \sum \lambda_i^2 = \dfrac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}$ となることが示された。

● $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の共分散について

$\hat{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$，$\hat{\beta} = \beta + \sum_{j=1}^{n} \omega_j u_j$ を利用して（$\hat{\beta}$ の方は添え字を j に変更），

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= \mathbf{E}\Big((\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)\Big) \\
&= \mathbf{E}\Big((\sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i)(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j)\Big) \\
&= \mathbf{E}(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_i \lambda_j u_i u_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_i \lambda_j \mathbf{E}(u_i u_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \omega_i \lambda_i \mathbf{E}(u_i^2) \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i \lambda_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i (\frac{1}{n} - \overline{X}\omega_i) \\
&= \sigma^2 \Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \omega_i - \overline{X} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2\Big) \\
&= \frac{-\sigma^2 \overline{X}}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}
\end{aligned}
$$

となる。

誤差項に関する仮定から，$i \neq j$ について $\mathbf{E}(u_i u_j) = 0$，$i = j$ について $\mathbf{E}(u_i u_j) = \mathbf{E}(u_i^2) = \sigma^2$ となることを利用している。

$\lambda_i = \dfrac{1}{n} - \overline{X}\omega_i$，$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 0$，$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}$ が用いられている。

数値例：

i	X_i	Y_i	X_i^2	$X_i Y_i$
1	**5**	**4**	**25**	**20**
2	**1**	**1**	**1**	**1**
3	**3**	**1**	**9**	**3**
4	**2**	**3**	**4**	**6**
5	**4**	**4**	**16**	**16**
合計	$\sum X_i$	$\sum Y_i$	$\sum X_i^2$	$\sum X_i Y_i$
	15	**13**	**55**	**46**
平均	$\overline{X}$	$\overline{Y}$		
	3	**2.6**		

$$\mathbf{V}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2} = \frac{\sigma^2}{55 - 5 \times 3^2} = \frac{\sigma^2}{10} = 0.1\sigma^2$$

$$\mathbf{V}(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sigma^2 55}{5(55 - 5 \times 3^2)} = \frac{55\sigma^2}{50} = 1.1\sigma^2$$

$$\mathbf{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -\frac{\sigma^2 \overline{X}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = -\frac{\sigma^2 \overline{X}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2} = -\frac{3\sigma^2}{55 - 5 \times 3^2} = -0.3\sigma^2$$

● $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分散・共分散に関する補足：　最小二乗法を復習する。

α，β のある推定量を $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ とする。

まず，次のような関数 $S(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ を定義する。

$$S(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i)^2$$

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ について，$S(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ を最小化することを考える。

$S(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ の最小化によって得られる次の 2 つの式：

$$\frac{\partial S(\hat{\alpha},\hat{\beta})}{\partial\hat{\alpha}} = 0, \qquad \frac{\partial S(\hat{\alpha},\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}} = 0$$

を満たす $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ が α，β の最小二乗推定量となる。

すなわち，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ は，

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i) = 0$$

を満たす。さらに，

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

から，行列表示によって，

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$$

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ **について，まとめて，**

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n\sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & -\sum_{i=1}^n X_i \\ -\sum_{i=1}^n X_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{pmatrix}$$

(* 復習) 逆行列の公式：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

逆行列の部分と分散，共分散とは以下のような関係がある。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}(\hat{\alpha}) & \mathbf{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) \\ \mathbf{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) & \mathbf{V}(\hat{\beta}) \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n\sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & -\sum_{i=1}^n X_i \\ -\sum_{i=1}^n X_i & n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} & -\dfrac{\sigma^2 \overline{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} \\ -\dfrac{\sigma^2 \overline{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} & \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} \end{pmatrix}$$

5.3.5 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分布 (σ^2 が既知の場合)

(* 復習) 正規分布：

2 つの確率変数 X，Y について，

$X \sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$ とする。

X と Y が独立のとき，$X \pm Y \sim N(\mu_1 \pm \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ となる。

正規分布の確率変数の和の分布も正規分布となることを利用する。

$\hat{\beta}$ については，下記のようになる。

1. $\hat{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i$

2. $\mathbf{E}(\hat{\beta}) = \beta$

3. $\mathbf{V}(\hat{\beta}) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$

よって，

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}\right)$$

となる。

$\hat{\alpha}$ **については，下記のようになる。**

1. $\hat{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$

2. $\mathbf{E}(\hat{\alpha}) = \alpha$

3. $\mathbf{V}(\hat{\alpha}) = \sigma^2\Big(\dfrac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2} + \dfrac{1}{n}\Big) = \dfrac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}$

よって，

$$\hat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}\right)$$

となる。

5.3.6 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の性質：最良線形不偏推定量と一致推定量

● 線形不偏推定量： 既に証明したとおり，$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n \omega_i Y_i$，$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i$（すなわち，線形推定量）と書き直すことができ，しかも，$\mathbf{E}(\hat{\beta}) = \beta$，$\mathbf{E}(\hat{\alpha}) = \alpha$（すなわち，不偏推定量）なの

で，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ は α，β の線形不偏推定量（線形推定量，かつ，不偏推定量）である。

● 最良線形不偏推定量：　最小二乗推定量は，線形不偏推定量の中で「最も良い（最良な）」推定量となっている。「最良」とは，最も小さな分散（最小分散）と同じ意味である。最良線形不偏推定量とは，最小分散線形不偏推定量と言い換えることができる。

　線形不偏推定量の中で，最も小さな分散を持つ推定量が最良線形不偏推定量（または，最小分散線形不偏推定量）と呼ばれる。

　ここでは，$\hat{\beta}$ が最良線形不偏推定量であることを証明する（$\hat{\alpha}$ については省略）。

$\hat{\beta}$ を変形すると以下の通りとなることは既に解説した通りである。

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i Y_i$$

ただし，$\omega_i = \dfrac{(X_i - \overline{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$ とする。このように，$\hat{\beta}$ は線形不偏推定量である。

別の線形不偏推定量を次のように考える。

$$\widetilde{\beta} = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i$$

ただし，$c_i = \omega_i + d_i$ とする。

$\widetilde{\beta}$ は下記のように変形される。

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta} &= \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i) Y_i = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i)(\alpha + \beta X_i + u_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} \omega_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i + \alpha \sum_{i=1}^{n} d_i + \beta \sum_{i=1}^{n} d_i X_i + \sum_{i=1}^{n} d_i u_i \\ &= \beta + \alpha \sum_{i=1}^{n} d_i + \beta \sum_{i=1}^{n} d_i X_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i + \sum_{i=1}^{n} d_i u_i\end{aligned}$$

ω_i について，$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 0$，$\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i = 1$ が成り立つことは既に証明済み。

両辺に期待値をとると，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\widetilde{\beta}) &= \mathbf{E}\Big(\beta + \alpha \sum_{i=1}^{n} d_i + \beta \sum_{i=1}^{n} d_i X_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i + \sum_{i=1}^{n} d_i u_i\Big) \\ &= \beta + \alpha \sum_{i=1}^{n} d_i + \beta \sum_{i=1}^{n} d_i X_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathbf{E}(u_i) + \sum_{i=1}^{n} d_i \mathbf{E}(u_i)\end{aligned}$$

$$= \beta + \alpha \sum_{i=1}^{n} d_i + \beta \sum_{i=1}^{n} d_i X_i$$

となる。

$\widetilde{\beta}$ も β の不偏推定量と仮定しているので，上の 3 行目の右辺第 2 項・第 3 項はゼロでなければならないため，

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} d_i X_i = 0$$

の 2 つの条件が必要となる。

この 2 つの条件が成り立っているとすると，

$$\widetilde{\beta} = \beta + \alpha \sum_{i=1}^{n} d_i + \beta \sum_{i=1}^{n} d_i X_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i + \sum_{i=1}^{n} d_i u_i$$

$$= \beta + \sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i) u_i$$

を利用して，

$$\mathbf{V}(\widetilde{\beta}) = \mathbf{V}\Big(\beta + \sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i) u_i\Big) = \mathbf{V}\Big(\sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i) u_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}\Big((\omega_i + d_i) u_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i)^2 \mathbf{V}(u_i)$$

$$= \sigma^2\Big(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \omega_i d_i + \sum_{i=1}^{n} d_i^2\Big) = \sigma^2\Big(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i^2\Big)$$

となる。

1 行目では下記の分散の公式が用いられている。

(* 復習) 分散：

a，b **は定数**

確率変数 X **について，** $\mathbf{V}(aX \pm b) = a^2\mathbf{V}(X)$

(* 復習) 確率変数の和の分散：

2 つの確率変数 X**，**Y **について，**

$\mathbf{V}(X \pm Y) = \mathbf{V}(X) \pm 2\mathbf{Cov}(X, Y) + \mathbf{V}(Y)$ **となる。**

特に，X **と** Y **が独立の場合は，**

$\mathbf{V}(X \pm Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$ **となる（独立であれば，**$\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ **に注意）。**

---

2 行目の $\sum \omega_i d_i = 0$ は下記の通りに得られる。

$\widetilde{\beta}$ **の不偏性の条件** $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$**，**$\sum_{i=1}^{n} d_i X_i = 0$**，**$\omega_i = \dfrac{(X_i - \overline{X})}{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2}$ **を利用すると，**

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i d_i = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})d_i}{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i d_i - \overline{X}\sum_{i=1}^{n} d_i}{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2} = 0$$

を得る。

まとめると，$\widetilde{\beta}$ **の分散は，**

$$\mathbf{V}(\widetilde{\beta}) = \sigma^2\Big(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i^2\Big)$$

となることが分かる。

$\hat{\beta}$ の分散は，

$$\mathbf{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2$$

であることを思い出すと，

$$\mathbf{V}(\widetilde{\beta}) \geq \mathbf{V}(\hat{\beta})$$

となる。

等号が成り立つときは，$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = 0$，すなわち，$d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$ のときとなり，これは最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ に一致する。

よって，$\hat{\beta}$ は最小分散線形不偏推定量，または，最良線形不偏推定量であると言える。

$\Longrightarrow$ ガウス=マルコフの定理と呼ばれる。

$\hat{\alpha}$ についても，同様で，α の最小分散線形不偏推定量となる。

証明は，

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

を利用すればよい。

● 推定量の関係：

最小分散 (最良) 線形不偏推定量 $\subset$ 線形不偏推定量 $\subset$ 線形推定量 $\subset$ 全推定量