例 1′： ゼロ制約の検定：

多重回帰モデル

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

において，

帰無仮説 H_0 ： $\beta_j = 0$

対立仮説 H_1 ： $\beta_j \neq 0$

を検定する場合，

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \cdots + \beta_{j-1} X_{j-1,i} + \beta_j X_{ji} + \beta_{j+1} X_{j+1,i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

の推定によって得られた残差を $\hat{u}_i$ (制約なし残差) とおき，

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \cdots + \beta_{j-1} X_{j-1,i} + \beta_{j+1} X_{j+1,i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

の推定によって得られた残差を $\widetilde{u}_i$ (制約付き残差) とする。

したがって，

$$\frac{(\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2)/G}{\sum \hat{u}_i^2/(n-k)} \sim F(G, n-k)$$

となる。ただし，$G = 1$ となる。

(*) $T \sim t(n-k)$，$F = T^2$ とするとき，$F \sim F(1, n-k)$ となる。

(* 復習) F 分布（再掲）：

$U \sim \chi^2(n)$，$V \sim \chi^2(m)$，U **と** V **は独立とする。**

このとき， $F = \dfrac{U/n}{V/m} \sim F(n,m)$ **となる。**

(* 復習) t 分布と F 分布：

- $Z \sim N(0,1)$，$U \sim \chi^2(k)$，Z **と** U **は独立，** $T = \dfrac{Z}{\sqrt{U/k}}$ **のとき，** $T \sim t(k)$ **となる。**
- $Z^2 \sim \chi^2(1)$，$U \sim \chi^2(k)$，Z^2 **と** U **は独立，** $F = T^2 = \dfrac{Z^2}{U/k}$ **のとき，** $F = T^2 \sim F(1,k)$ **となる。**

例 2： コブ＝ダグラス型生産関数：

制約なしの場合：

$$\log(Q_i) = \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + \beta_3 \log(L_i) + u_i$$

の推定によって得られた残差を $\hat{u}_i$ (制約なし残差) とおく。

$\beta_2 + \beta_3 = 1$ **の制約ありの場合（$G = 1$）：**

$$\log(\frac{Q_i}{L_i}) = \beta_1' + \beta_2 \log(\frac{K_i}{L_i}) + u_i$$

の推定によって得られた残差を $\widetilde{u}_i$ (制約付き残差) とする。

したがって，この場合，

帰無仮説 $H_0: \beta_2 + \beta_3 = 1$

対立仮説 $H_1: \beta_2 + \beta_3 \neq 1$

となり，

$$\frac{(\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2)/G}{\sum \hat{u}_i^2/(n-k)} \sim F(G, n-k)$$

となる。ただし，$G = 1$**，**$k = 3$ **となる。**

例 3： 構造変化の検定：

制約なしの場合：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma D_i + \delta D_i X_i + u_i$$

の推定によって得られた残差を $\hat{u}_i$ (制約なし残差) とおく。

$\gamma = \delta = 0$ の制約ありの場合（$G = 2$）：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

の推定によって得られた残差を $\widetilde{u}_i$ (制約付き残差) とする。

したがって，この場合，

帰無仮説 H_0 : $\gamma = \delta = 0$

対立仮説 H_1 : $\gamma \neq 0$，**または，**$\delta \neq 0$

となり，

$$\frac{(\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2)/G}{\sum \hat{u}_i^2/(n-k)} \sim F(G, n-k)$$

となる。ただし，$G = 2$，$k = 4$ **となる。**

例 4： 定数項を除いて，説明変数の係数がすべてゼロという同時検定：

$X_{1i} = 1$ **（定数項）とする。**

定数項を除くすべての説明変数の係数がゼロの検定を行う。

制約なしの場合：

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

の推定によって得られた残差を $\hat{u}_i$ **(制約なし残差) とおく。**

$\beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$ **の制約ありの場合（**$G = k - 1$**）：**

$$Y_i = \beta_1 + u_i$$

の推定によって得られた残差を $\widetilde{u}_i$ (制約付き残差) とする。

β_1 のある推定量を $\widetilde{\beta}_1$ とする。

残差は $\widetilde{u}_i = Y_i - \widetilde{\beta}_1$ となる。

$$S(\widetilde{\beta}_1) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{u}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widetilde{\beta}_1)^2$$

として，

$$\min_{\widetilde{\beta}_1} S(\widetilde{\beta}_1)$$

を解く $\widetilde{\beta}_1$ が制約付き最小二乗推定量となる。

$\widetilde{\beta}_1$ について微分してゼロと置くと，

$$\frac{\mathbf{d}S(\widetilde{\beta}_1)}{\mathbf{d}\widetilde{\beta}_1} = -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widetilde{\beta}_1) = 0$$

を解く。

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widetilde{\beta}_1) = \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n}\widetilde{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{n} Y_i - n\widetilde{\beta}_1 = 0$$

すなわち，

$$\widetilde{\beta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y}$$

となり，残差平方和は，

$$\sum \widetilde{u}_i^2 = \sum (Y_i - \overline{Y})^2$$

となる。

(* 決定係数)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \widetilde{u}_i^2}{\sum (Y_i - \overline{Y})^2} = 0$$

したがって，この場合，

帰無仮説 $H_0:\ \beta_2 = \ \cdots\ = \beta_k = 0$

対立仮説 $H_1:\ \beta_2 \neq 0$，**または，**$\beta_3 \neq 0$，$\cdots$，**または，**$\beta_k \neq 0$

となり，

$$\frac{(\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2)/G}{\sum \hat{u}_i^2/(n-k)} \sim F(G, n-k)$$

となる。ただし，$G = k - 1$ **となる。**

数値例 1：「6.1.1 節　異常値ダミー」　　今までの数値例を用いる。

$$Y_i = \underset{(0.398)}{\mathbf{0.5}} + \underset{(1.849)}{\mathbf{0.7}} X_i,$$

$$R^2 = 0.5326, \qquad \overline{R}^2 = 0.3768, \qquad s^2 = 1.197^2$$

$$Y_i = \underset{(1.132)}{\mathbf{0.9}} + \underset{(2.985)}{\mathbf{0.7}} X_i - \underset{(2.412)}{\mathbf{2.0}} D_i,$$

$$R^2 = 0.8804, \qquad \overline{R}^2 = 0.7609, \qquad s^2 = 0.742^2$$

となる。ただし，係数の推定値の下の括弧内は t **値を表すものとする。** $i = 3$ **のとき** $D_i = 1$**，その他は** $D_i = 0$ **である。**

回帰式： $Y_i = \alpha + \gamma D_i + \beta X_i + u_i$ **について，**

帰無仮説 $H_0:\ \gamma = 0$

対立仮説 $H_1:\ \gamma \neq 0$

D_i **の係数** γ **の有意性検定を** F **分布を用いて行う。**

$n = 5$ **を使い，**s^2 **からそれぞれの残差平方和を逆算する。**

$$\sum \widetilde{u}_i^2 = (5-2)\times 1.197^2 = 4.3, \qquad \sum \hat{u}_i^2 = (5-3)\times 0.742^2 = 1.1$$

となり，$G=1$ **を代入して，**

$$\frac{(\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2)/G}{\sum \hat{u}_i^2/(n-k)} = \frac{(4.3-1.1)/1}{1.1/(5-3)} = 5.82$$

と $F_{0.05}(1,2) = 18.5$ **を比較する（教科書『計量経済学』p.354 の表 4 参照）。**

$$\sqrt{5.82} = 2.412 \implies t \text{ 値と同じ}$$

数値例 2：「6.1.2 節　構造変化ダミー」　　「6.1.2 節　構造変化ダミー」の数値例を用いる。

$$Y_i = \underset{(0.427)}{\mathbf{0.211}} + \underset{(8.784)}{\mathbf{1.010}}\, X_i$$

$$R^2 = 0.8108, \qquad \overline{R}^2 = 0.8003, \qquad s^2 = 0.9928^2$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
Y_i = & \mathbf{0.000} & + & \mathbf{1.000} & X_i + & \mathbf{3.370} & D_i - & \mathbf{0.543} & D_iX_i, \\
& \mathbf{(0.000)} & & \mathbf{(2.715)} & & \mathbf{(2.101)} & & \mathbf{(1.214)} &
\end{array}
$$

$$
R^2 = 0.8612, \qquad \overline{R}^2 = 0.8351, \qquad s^2 = 0.9021^2
$$

となる。ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。$i = 1, 2, \cdots, 9$ のとき $D_i = 0$，その他は $D_i = 1$ である。

回帰式： $Y_i = \alpha + \delta D_i + \beta X_i + \gamma D_i X_i + u_i$ について，

帰無仮説 $H_0:\ \delta = \gamma = 0$

対立仮説 $H_1:\ \delta \neq 0$，または，$\gamma \neq 0$

D_i と D_iX_i の係数 δ，γ の有意性の同時検定を F 分布を用いて行う。

$n = 20$ を使い，s^2 からそれぞれの残差平方和を逆算する。

$$\sum \widetilde{u}_i^2 = (20-2) \times 0.9928^2 = 17.74, \qquad \sum \hat{u}_i^2 = (20-4) \times 0.9021^2 = 13.02$$

となり，$G = 2$ を代入して，

$$\frac{(\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2)/G}{\sum \hat{u}_i^2/(n-k)} = \frac{(17.74 - 13.02)/2}{13.02/(20-4)} = 2.90$$

と $F_{0.05}(2, 16) = 3.63$ を比較する（教科書『計量経済学』p.354 の表 4 参照）。

$2.90 << 3.63$ なので，帰無仮説 $H_0: \ \delta = \gamma = 0$ を棄却できない（採択する）。

数値例 3：「6.1.3 節　季節ダミー」　　**「6.1.3 節　季節ダミー」の数値例を用いる。**

$$Y_i = -\ \underset{(0.805)}{\mathbf{0.8094}} \ +\ \underset{(5.002)}{\mathbf{0.5200}}\ X_i$$

$$R^2 = 0.3971, \qquad \overline{R}^2 = 0.3812, \qquad s^2 = 2.2882^2$$

$$Y_i = -\ \underset{(\ 0.426)}{\mathbf{0.2784}} \ -\ \underset{(\ 4.402)}{\mathbf{2.9145}}\ D_{1i} -\ \underset{(\ 6.393)}{\mathbf{4.6697}}\ D_{2i} -\ \underset{(\ 8.262)}{\mathbf{7.0951}}\ D_{3i} +\ \underset{(11.825)}{\mathbf{1.0474}}\ X_i$$

$$R^2 = 0.7998, \qquad \overline{R}^2 = 0.7769, \qquad s^2 = 1.3739^2$$

となる。ただし，係数の推定値の下の括弧内は t **値を表すものとする。**

回帰式： $Y_i = \alpha + \alpha_1 D_{1i} + \alpha_2 D_{2i} + \alpha_3 D_{3i} + \beta X_i + u_i$ **について，**

帰無仮説 H_0 : **定数項が一定** $\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ **の検定ではない**

対立仮説 H_1 : **定数項が季節に依存**

$n = 40$ **を使い，**s^2 **からそれぞれの残差平方和を逆算する。**

$$\sum \widetilde{u}_i^2 = (40-2)\times 2.2882^2 = 198.96, \qquad \sum \hat{u}_i^2 = (40-5)\times 1.3739^2 = 66.07$$

となり，$G = 3$ **を代入して，**

$$\frac{(\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2)/G}{\sum \hat{u}_i^2/(n-k)} = \frac{(198.96.74 - 66.07)/3}{66.07/(40-5)} = 23.47$$

と $F_{0.05}(3,35) = 2.88$ **(2.92 と 2.84 の間) を比較する（教科書『計量経済学』p.354 の表 4 参照）。**

$23.47 > 2.88$ **なので** H_0 **を棄却する，すなわち，定数項は季節に依存する。**