6.4.3 F 統計量と決定係数との関係

今まで通り，重回帰モデル

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

において，パラメータ β_1，β_2，$\cdots$，β_k に何らかの制約の検定を行う。

制約の数を G 個とする。

全く制約の無い場合に得られた残差を $\hat{u}_i$ とする。

制約を含めて推定されたときの残差を $\widetilde{u}_i$ とする。

制約なし回帰式からの決定係数 $\hat{R}^2$ を，

$$\hat{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}$$

制約付き回帰式からの決定係数 $\widetilde{R}^2$ を，

$$\widetilde{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{u}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}$$

とする。

このとき，

$$\frac{(\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2)/G}{\sum \hat{u}_i^2/(n-k)} = \frac{\left(\dfrac{\sum \widetilde{u}_i^2}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2} - \dfrac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}\right)\Big/G}{\left(\dfrac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}\right)\Big/(n-k)}$$

$$
= \frac{\Big((1-\widetilde{R}^2) - (1-\hat{R}^2)\Big)/G}{(1-\hat{R}^2)/(n-k)} = \frac{(\hat{R}^2 - \widetilde{R}^2)/G}{(1-\hat{R}^2)/(n-k)} \sim F(G, n-k)
$$

となる。

1 つ目の等式では，分子・分母を $\sum(Y_i - \overline{Y})^2$ で割っている。

2 つ目の等式では，分子・分母を決定係数を用いて書き直している。

2 つの回帰式からの決定係数を使って，線形制約の検定を行うことができる。

数値例 1：「6.1.1 節　異常値ダミー」　　**今までの数値例を用いる。**

$$Y_i = \underset{(0.398)}{\mathbf{0.5}} + \underset{(1.849)}{\mathbf{0.7}} X_i,$$

$$R^2 = 0.5326, \qquad \overline{R}^2 = 0.3768, \qquad s^2 = 1.197^2$$

$$Y_i = \underset{(1.132)}{\mathbf{0.9}} + \underset{(2.985)}{\mathbf{0.7}} X_i - \underset{(2.412)}{\mathbf{2.0}} D_i,$$

$$R^2 = 0.8804, \qquad \overline{R}^2 = 0.7609, \qquad s^2 = 0.742^2$$

となる。ただし，係数の推定値の下の括弧内は t **値を表すものとする。**$i = 3$ **のとき** $D_i = 1$**，その他は** $D_i = 0$ **である。**

回帰式： $Y_i = \alpha + \gamma D_i + \beta X_i + u_i$ **について，**

帰無仮説 H_0 : $\gamma = 0$

対立仮説 H_1 : $\gamma \neq 0$

D_i **の係数** γ **の有意性検定を** F **分布を用いて行う。**

$n = 5$**，**R^2 **から，**

$$\widetilde{R}^2 = 0.5326, \qquad \hat{R}^2 = 0.8804$$

である。$G = 1$ **を代入して，**

$$\frac{(\hat{R}^2 - \widetilde{R}^2)/G}{(1 - \hat{R}^2)/(n-k)} = \frac{(0.8804 - 0.5326)/1}{(1 - 0.8804)/(5-3)} = 5.82$$

と $F_{0.05}(1,2) = 18.5$ を比較する（教科書『計量経済学』p.354 の表 4 参照）。

$5.82 < 18.5$ なので，帰無仮説 $H_0:\ \gamma = 0$ は採択される。

$\sqrt{5.82} = 2.412 \implies t$ 値と同じ

数値例 2：「6.1.2 節　構造変化ダミー」　　「6.1.2 節　構造変化ダミー」の数値例を用いる。

$$
\begin{array}{cccccc}
Y_i = & \mathbf{0.211} & + & \mathbf{1.010} & X_i \\
 & \mathbf{(0.427)} & & \mathbf{(8.784)} &
\end{array}
$$

$$
R^2 = 0.8108, \qquad \overline{R}^2 = 0.8003, \qquad s^2 = 0.9928^2
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
Y_i = & \mathbf{0.000} & + & \mathbf{1.000} & X_i + & \mathbf{3.370} & D_i - & \mathbf{0.543} & D_iX_i, \\
& \mathbf{(0.000)} & & \mathbf{(2.715)} & & \mathbf{(2.101)} & & \mathbf{(1.214)} &
\end{array}
$$

$$
R^2 = 0.8612, \qquad \overline{R}^2 = 0.8351, \qquad s^2 = 0.9021^2
$$

となる。ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。$i = 1, 2, \cdots, 9$ のとき $D_i = 0$，その他は $D_i = 1$ である。

回帰式： $Y_i = \alpha + \delta D_i + \beta X_i + \gamma D_i X_i + u_i$ について，

帰無仮説 $H_0 :\ \delta = \gamma = 0$

対立仮説 $H_1 :\ \delta \neq 0$，または，$\gamma \neq 0$

D_i と D_iX_i の係数 δ，γ の有意性の同時検定を F 分布を用いて行う。

$n = 20$，R^2 から，

$$\widetilde{R}^2 = 0.8108, \qquad \hat{R}^2 = 0.8612$$

である。$G = 2$ を代入して，

$$\frac{(\hat{R}^2 - \widetilde{R}^2)/G}{(1 - \hat{R}^2)/(n - k)} = \frac{(0.8612 - 0.8108)/2}{(1 - 0.8612)/(20 - 4)} = 2.90$$

と $F_{0.05}(2, 16) = 3.63$ を比較する（教科書『計量経済学』p.354 の表 4 参照）。

$2.90 < 3.63$ なので，帰無仮説 $H_0:\ \delta = \gamma = 0$ は採択される。

数値例 3：「6.1.3 節　季節ダミー」　　**「6.1.3 節　季節ダミー」の数値例を用いる。**

$$Y_i = -\underset{(0.805)}{\mathbf{0.8094}} + \underset{(5.002)}{\mathbf{0.5200}}\, X_i$$

$$R^2 = 0.3971, \qquad \overline{R}^2 = 0.3812, \qquad s^2 = 2.2882^2$$

$$Y_i = -\underset{(0.426)}{\mathbf{0.2784}} - \underset{(4.402)}{\mathbf{2.9145}}\, D_{1i} - \underset{(6.393)}{\mathbf{4.6697}}\, D_{2i} - \underset{(8.262)}{\mathbf{7.0951}}\, D_{3i} + \underset{(11.825)}{\mathbf{1.0474}}\, X_i$$

$$R^2 = 0.7998, \qquad \overline{R}^2 = 0.7769, \qquad s^2 = 1.3739^2$$

となる。ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。

回帰式： $Y_i = \alpha + \alpha_1 D_{1i} + \alpha_2 D_{2i} + \alpha_3 D_{3i} + \beta X_i + u_i$ **について，**

帰無仮説 H_0 : **定数項が一定** $\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ **の検定ではない**

対立仮説 H_1 : **定数項が季節に依存**

$n = 20$，R^2 **から，**

$$\widetilde{R}^2 = 0.3971, \qquad \hat{R}^2 = 0.7998$$

である。$G = 3$ **を代入して，**

$$\frac{(\hat{R}^2 - \widetilde{R}^2)/G}{(1 - \hat{R}^2)/(n-k)} = \frac{(0.7998 - 0.3971)/3}{(1 - 0.7998)/(40 - 5)} = 23.47$$

と $F_{0.05}(3, 35) = 2.88$ **(2.92 と 2.84 の間) を比較する（教科書『計量経済学』p.354 の表 4 参照）。**

$23.47 > 2.88$ なので H_0 を棄却する，すなわち，定数項は季節に依存する。

数値例 4：定数項を除いて，説明変数の係数がすべてゼロとなる検定：　「6.1.2 節　構造変化ダミー」の数値例を用いる。

$$
\begin{array}{rcccccccl}
Y_i = & \mathbf{0.000} & + & \mathbf{1.000} & X_i + & \mathbf{3.370} & D_i - & \mathbf{0.543} & D_i X_i, \\
& \mathbf{(0.000)} & & \mathbf{(2.715)} & & \mathbf{(2.101)} & & \mathbf{(1.214)} &
\end{array}
$$

$$
R^2 = 0.8612, \qquad \overline{R}^2 = 0.8351, \qquad s^2 = 0.9021^2
$$

となる。ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。$i = 1, 2, \cdots, 9$ のとき $D_i = 0$，その他は $D_i = 1$ である。

回帰式： $Y_i = \alpha + \delta D_i + \beta X_i + \gamma D_i X_i + u_i$ **について，**

帰無仮説 H_0 : $\delta = \beta = \gamma = 0$

対立仮説 H_1 : $\delta \neq 0$**，または，**$\beta \neq 0$**，または，**$\gamma \neq 0$

$n = 20$**，**R^2 **から，**

$$\widetilde{R}^2 = 0, \qquad \hat{R}^2 = 0.8612$$

である。$G = 3$ **を代入して，**

$$\frac{(\hat{R}^2 - \widetilde{R}^2)/G}{(1 - \hat{R}^2)/(n-k)} = \frac{\hat{R}^2/G}{(1 - \hat{R}^2)/(n-k)} = \frac{0.8612/3}{(1 - 0.8612)/(20 - 4)} = 33.1$$

と $F_{0.05}(3, 16) = 3.24$ **を比較する（教科書『計量経済学』p.354 の表 4 参照）。**

$33.1 > 3.24$ **なので，説明変数の係数が全部ゼロという帰無仮説は棄却される。**

6.5　Excel 2019 による回帰分析
(「6.1.3　季節ダミー」を例に取って)

左の A 列～F 列が数値例

C 列～F 列は季節ダミー

d1 は第一四半期に 1，それ以外 0（C 列）

d2 は第二四半期に 1，それ以外 0（D 列）

d3 は第三四半期に 1，それ以外 0（E 列）

d4 は第四四半期に 1，それ以外 0（F 列）

推定式は，

$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$　　←　ダミーなし

$Y_i = \alpha + \beta X_i + \alpha_1 d1_i + \alpha_2 d2_i + \alpha_3 d3_i + u_i$　　←　季節ダミー付き

の二つ。

	A	B	C	D	E	F
1	y	x	d1	d2	d3	d4
2	1	3.510417	1	0	0	0
3	1	6.345513	0	1	0	0
4	1	10.522048	0	0	1	0
5	1	2.477398	0	0	0	1
6	2	5.649333	1	0	0	0
7	2	8.300705	0	1	0	0
8	2	10.027703	0	0	1	0
9	2	2.520644	0	0	0	1
10	3	5.179950	1	0	0	0
11	3	6.359450	0	1	0	0
12	3	10.978387	0	0	1	0
13	3	3.825372	0	0	0	1
14	4	5.889375	1	0	0	0
15	4	7.374288	0	1	0	0
16	4	12.137841	0	0	1	0
17	4	4.470294	0	0	0	1
18	5	9.154872	1	0	0	0
19	5	8.232540	0	1	0	0
20	5	9.751812	0	0	1	0
21	5	4.219973	0	0	0	1
22	6	10.100314	1	0	0	0
23	6	12.016091	0	1	0	0
24	6	12.965069	0	0	1	0
25	6	6.064354	0	0	0	1
26	7	9.866475	1	0	0	0
27	7	12.749116	0	1	0	0
28	7	14.612295	0	0	1	0
29	7	7.606418	0	0	0	1
30	8	11.297148	1	0	0	0
31	8	12.031481	0	1	0	0
32	8	11.969883	0	0	1	0
33	8	7.638043	0	0	0	1
34	9	11.687142	1	0	0	0
35	9	14.194724	0	1	0	0
36	9	14.284577	0	0	1	0
37	9	8.533405	0	0	0	1
38	10	10.663011	1	0	0	0
39	10	12.152527	0	1	0	0
40	10	15.663455	0	0	1	0
41	10	7.814745	0	0	0	1

(1) $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ ← ダミーなし

回帰統計	
重相関 R	0.63013
重決定 R2	0.397064
補正 R2	0.381197
標準誤差	2.288237
観測数	40

分散分析表

	自由度	変動	分散	川された分ī	有意 F
回帰	1	131.031	131.031	25.02489	1.32E-05
残差	38	198.969	5.236026		
合計	39	330			

	係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
切片	0.809394	1.005036	0.805339	0.425635	-1.22519	2.843982	-1.22519	2.843982
x	0.519968	0.103942	5.002489	1.32E-05	0.309549	0.730387	0.309549	0.730387

重相関 R	0.63013	→ $\hat{Y}_i$ と Y_i との相関係数
重決定 R2	0.397064	→ 決定係数（$=\hat{Y}_i$ と Y_i との相関係数の二乗）
補正 R2	0.381197	→ 自由度修正済み決定係数
標準誤差	2.288237	→ 回帰式の標準誤差 s
観測数	40	→ 標本数（データ数）n

回帰	1	131.031	→ $\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$
残差	38	198.969	→ $\sum \hat{u}_i^2$

残差	38	198.969	5.236026

→ $\frac{1}{n-k}\sum \hat{u}_i^2 = s^2$

合計	39	330

→ $\sum (Y_i - \bar{Y})^2$

	係数
切片	0.809394
x	0.519968

→ 推定値（上段は $\hat{\alpha}$, 下段は $\hat{\beta}$）

標準誤差
1.005036
0.103942

→ 各係数の標準誤差（上段は $s_{\hat{\alpha}}$, 下段は $s_{\hat{\beta}}$ ）

t
0.805339
5.002489

→ ***t* 値（上段は H$_0$：α =0，下段は H$_0$：β =0 の検定）**

下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
-1.22519	2.843982	-1.22519	2.843982
0.309549	0.730387	0.309549	0.730387

→ 右 2 列：**95%信頼区間（上段は α，下段は β の信頼区間），**

左 2 列：95%信頼区間（99%信頼区間などに変更可）

25.02489

→ $$\frac{\mathbf{131.031/1}}{\mathbf{198.969/38}}$$

定数項を除く回帰係数がすべてゼロという仮説の検定

(2)　$Y_i = \alpha + \beta X_i + \alpha_1 d1_i + \alpha_2 d2_i + \alpha_3 d3_i + u_i$　←　季節ダミー付き

回帰統計	
重相関 R	0.894315
重決定 R2	0.799799
補正 R2	0.776918
標準誤差	1.373904
観測数	40

分散分析表

	自由度	変動	分散	判された分散	有意 F
回帰	4	263.9336	65.98339	34.956	8.95E-12
残差	35	66.06645	1.887613		
合計	39	330			

	係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
切片	-0.27837	0.653879	-0.42571	0.672922	-1.60581	1.04908	-1.60581	1.04908
x	1.047362	0.088574	11.82472	8.87E-14	0.867548	1.227177	0.867548	1.227177
d1	-2.91454	0.662023	-4.40247	9.6E-05	-4.25851	-1.57056	-4.25851	-1.57056
d2	-4.66975	0.730397	-6.39344	2.35E-07	-6.15253	-3.18696	-6.15253	-3.18696
d3	-7.09509	0.858806	-8.26157	9.74E-10	-8.83856	-5.35162	-8.83856	-5.35162

● 緑色の 34.956 は，定数項を除くすべての回帰係数がゼロという仮説（$\beta=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$）の検定統計値で，$\frac{263.9336/4}{66.06645/35}=\frac{65.98339}{1.887613}=\mathbf{34.956}$

この値と，$F_{0.05}(4,35)=2.65$（2.69 と 2.61 の間）を比較する。

34.956＞2.65 なので，定数項を除くすべての回帰係数がゼロという仮説（$\beta=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$）は棄却される。

● 季節性があるかどうか（$d1_i$，$d2_i$，$d3_i$ を含めるかどうか）の検定： (1)式と(2)式の比較

(1)式は制約付き回帰式： $\sum\tilde{u}_i^2=198.696$，$\tilde{R}^2=0.397064$

(2)式は制約なし回帰式： $\sum\hat{u}_i^2=66.06645$，$\hat{R}^2=0.799799$

残差平方和を用いて，$\frac{\left(\sum\tilde{u}_i^2-\sum\hat{u}_i^2\right)/G}{\sum\hat{u}_i^2/(n-k)}=\frac{(198.969-66.06645)/3}{66.06646/35}=\mathbf{23.47}$

決定係数を用いて，$\frac{\left(\hat{R}^2-\tilde{R}^2\right)/G}{(1-\hat{R}^2)/(n-k)}=\frac{(0.799799-0.397064)/3}{(1-0.799799)/35}=\mathbf{23.47}$

この数値と $F_{0.05}(3,35)=2.88$（2.92 と 2.84 の間）

23.47＞2.88 なので，季節ダミーは必要と結論づける。(2 通りの方法)

ついでに,

$Y_i = \alpha + \beta X_i + \alpha_1 d1_i + \alpha_2 d2_i + \alpha_3 d3_i + \alpha_4 d4_i + u_i$ ← **季節ダミー4つ付き**

下記の計算結果が得られる。

回帰統計	
重相関 R	0.894315
重決定 R2	0.799799
補正 R2	0.748347
標準誤差	1.373904
観測数	40

分散分析表

	自由度	変動	分散	された分散	有意 F
回帰	5	263.9336	52.78671	34.956	1.82E-12
残差	35	66.06645	1.887613		
合計	40	330			

	係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
切片	-7.37345	1.17218	-6.29037	3.21E-07	-9.75311	-4.9938	-9.75311	-4.9938
x	1.047362	0.088574	11.82472	8.87E-14	0.867548	1.227177	0.867548	1.227177
d1	4.18055	0.708883	5.897375	1.05E-06	2.741441	5.61966	2.741441	5.61966
d2	2.425339	0.647759	3.7442	0.00065	1.110318	3.740359	1.110318	3.740359
d3	0	0	65535	#NUM!	0	0	0	0
d4	7.095087	0.858806	8.261567	#NUM!	5.351617	8.838556	5.351617	8.838556