第７章　最小二乗法における一般的な仮定について

最小自乗法の仮定：

- u_1，u_2，$\cdots$，u_n は互いに独立
- u_i の分散は一定（すなわち，すべての i について σ^2）

- $u_i \sim N(0, \sigma^2)$（すなわち，すべての i について u_i は正規分布）

- X_i は非確率変数

それぞれの仮定が崩れた場合，どのようなことが起こるかを考察する。

7.1　誤差項：系列相関について

7.1.1　系列相関の意味

　最小自乗法の仮定の一つに，「攪乱項 u_1，u_2，$\cdots$，u_n は互いに独立に分布する」というものがあった。

データの順番が重要な場合，すなわち，時系列データの場合を考える。

ただし，時系列データでなくても，順番が重要な場合は考えられる（地理的な位置関係など）が，ここでは時系列データを念頭に置いて欲しい。

u_1，u_2，$\cdots$，u_n に系列相関がある場合，次の 2 つが考えられる。

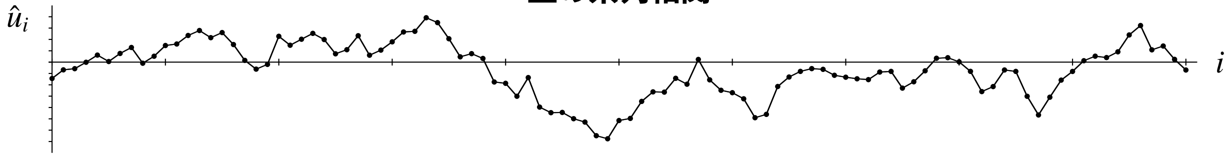
- それぞれの符号が順に，＋＋＋－－－－＋＋－－－＋＋・・・のように，プラスが連続で続いた後で，マイナスが連続で続くというような場合，u_1，u_2，$\cdots$，u_n は「正の系列相関がある」と言う。
- また，それぞれの符号が順に，＋－＋－＋－＋－＋－＋－＋－・・・のように交互にプラス，マイナスになる場合，u_1，u_2，$\cdots$，u_n は「負の系列相関がある」と言う。

特徴として，u_1，u_2，$\cdots$，u_i から u_{i+1} の符号がある程度予想できる。

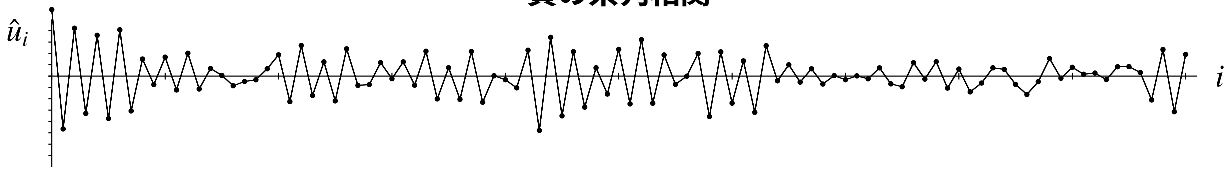
これは「u_1，u_2，$\cdots$，u_n は互いに独立に分布する」という仮定に反する。

横軸が時間 i，縦軸が残差 $\hat{u}_i$ としてグラフを描くと次のようになる。

正の系列相関



負の系列相関



7.1.2　系列相関の指標：DW について

ダービン・ワトソン（DW）比とは，誤差項の系列相関，すなわち，u_i と u_{i-1} との間の相関の有無を検定するために考案された。

すなわち，ダービン・ワトソン（DW）比とは，回帰式が

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ \cdots \ + \beta_k X_{ki} + u_i$$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i$$

のときに，帰無仮説 $H_0:\ \rho = 0$，対立仮説 $H_1:\ \rho \neq 0$ の検定である。

ただし，ϵ_1，ϵ_2，$\cdots$，ϵ_n は互いに独立とする。

- $\rho > 0$ のとき，u_1，u_2，$\cdots$，u_n は「正の系列相関がある」と言う（プラスが連続で続いた後で，マイナスが連続で続くというような場合）。

- $\rho < 0$ のとき，u_1，u_2，$\cdots$，u_n は「負の系列相関がある」と言う（プラスとマイナスが交互になる場合）。

- $\rho = 0$ のとき，u_1，u_2，$\cdots$，u_n は「系列相関がない」と言う（符号の法則性がない場合）。

ダービン・ワトソン（DW）比の定義は次の通りである。

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n}(\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}$$

ただし，$\hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki}$，$j = 1, 2, \cdots, k$ について $\hat{\beta}_j$ は β_j の最小二乗推定値とする。

DW 比は，近似的に次のように書き換えられる。

$$
\begin{aligned}
DW &= \frac{\sum_{i=2}^{n}(\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2} = \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_i^2 - 2\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_i\hat{u}_{i-1} + \sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{i-1}^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2} \\
&= \frac{2\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 - (\hat{u}_1^2 + \hat{u}_n^2)}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2} - 2\frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_i\hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2} \approx 2\Big(1 - \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_i\hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{i-1}^2}\Big) = 2(1-\hat{\rho})
\end{aligned}
$$

以下の 2 つの近似が用いられる。

$$
\frac{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_n^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2} \approx 0, \qquad \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_i\hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2} = \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_i\hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{i-1}^2 + \hat{u}_n^2} \approx \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_i\hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{i-1}^2} = \hat{\rho}
$$

すなわち，$\hat{\rho}$ は，$\hat{u}_i$ を被説明変数，$\hat{u}_{i-1}$ を説明変数としたときの $\hat{u}_{i-1}$ の回帰係数である。

$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i$ において，u_i，u_{i-1} の代わりに $\hat{u}_i$，$\hat{u}_{i-1}$ に置き換えて，ρ の最小二乗推定値 $\hat{\rho}$ を求めることになる。

具体的には，下記の最小化問題を解いたときの $\hat{\rho}$ の解となる。

$$\min_{\hat{\rho}} \sum_{i=2}^{n} (\hat{u}_i - \hat{\rho}\hat{u}_{i-1})^2$$

DW 比には，次のような性質がある。

1. DW 比の値が 2 前後のとき，系列相関なし ($\hat{\rho} = 0$ のとき，$DW \approx 2$)。
2. DW 比が 2 より十分に小さいとき，正の系列相関と判定される。
3. DW 比が 2 より十分に大きいとき，負の系列相関と判定される。

$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i$ について，ρ は u_i と u_{i-1} との相関係数：

$$\rho = \frac{\mathbf{Cov}(u_i, u_{i-1})}{\sqrt{\mathbf{V}(u_i)}\sqrt{\mathbf{V}(u_{i-1})}} = \frac{\mathbf{Cov}(u_i, u_{i-1})}{\mathbf{V}(u_i)}$$

$\mathbf{V}(u_i) = \mathbf{V}(u_{i-1})$ に注意。すなわち，$-1 < \rho < 1$ となる。

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=2}^{n} \hat{u}_i \hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=2}^{n} \hat{u}_{i-1}^2} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} \hat{u}_i \hat{u}_{i-1}}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} \hat{u}_{i-1}^2} \longrightarrow \frac{\mathbf{Cov}(u_i, u_{i-1})}{\mathbf{V}(u_i)} = \rho$$

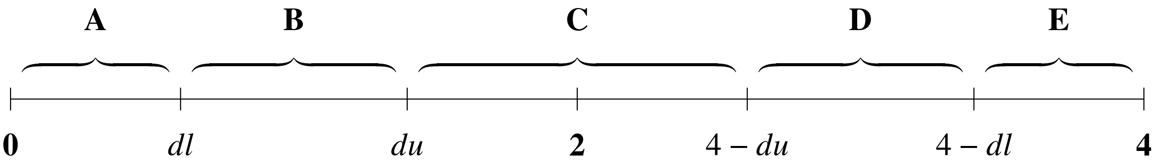
$\hat{\rho}$ は ρ の一致推定量となっている（証明略）。

$$DW \approx 2(1 - \hat{\rho}) \longrightarrow 2(1 - \rho)$$

よって，$0 < DW < 4$ となる。

$\rho = 0$（系列相関なし）のとき，$DW = 2$ となる。

DW テストでは，dl と du によって下記のように **A**，**B**，**C**，**D**，**E** の **5** つの領域に分類される。



dl と du は，n と k に依存し，統計表から得られる数値である（統計表は後述）。

- DW が 2 前後の場合（領域 C），$\rho = 0$ を意味し，誤差項に系列相関はない（$\rho = 0$）と判定される。
- DW がゼロに近い場合（領域 A），ρ は 1 に近いことを意味し，誤差項に正の系列相関がある（$\rho > 0$）と判定される。
- DW が 4 に近い場合（領域 E），ρ は -1 に近いことを意味し，誤差項に負の系列相関がある（$\rho < 0$）と判定される。

- DW は 2 より小さいがゼロに近いとは言えない場合（領域 B），誤差項に正の系列相関があるとは言えない（$\rho > 0$ という傾向はある）。

- DW は 2 より大きいが 4 に近いとは言えない場合（領域 D），誤差項に負の系列相関があるとは言えない（$\rho < 0$ という傾向はある）。

正確な判定には，データ数 n とパラメータ数 k（正確には，定数項を除くパラメータ数 k'）に依存して，dl と du の値が決まり，次ページの表 7.1 のように 5 つの領域に分類される。

表 7.1： ダービン・ワトソン統計量の 5 % 点の上限と下限

(1) $k' = 1$

n	A		B		C		D		E	
	下限	**上限**	**下限**	**上限**	**下限**	**上限**	**下限**	**上限**	**下限**	**上限**
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	**0**	**1.08**	**1.08**	**1.36**	**1.36**	**2.64**	**2.64**	**2.92**	**2.92**	**4**
20	**0**	**1.20**	**1.20**	**1.41**	**1.41**	**2.59**	**2.59**	**2.80**	**2.80**	**4**
25	**0**	**1.29**	**1.29**	**1.45**	**1.45**	**2.55**	**2.55**	**2.71**	**2.71**	**4**
30	**0**	**1.35**	**1.35**	**1.49**	**1.49**	**2.51**	**2.51**	**2.65**	**2.65**	**4**

(2) $k' = 2$

n	A		B		C		D		E	
	下限	**上限**	**下限**	**上限**	**下限**	**上限**	**下限**	**上限**	**下限**	**上限**
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	**0**	**0.95**	**0.95**	**1.54**	**1.54**	**2.46**	**2.46**	**3.05**	**3.05**	**4**
20	**0**	**1.10**	**1.10**	**1.54**	**1.54**	**2.46**	**2.46**	**2.90**	**2.90**	**4**
25	**0**	**1.21**	**1.21**	**1.55**	**1.55**	**2.45**	**2.45**	**2.79**	**2.79**	**4**
30	**0**	**1.28**	**1.28**	**1.57**	**1.57**	**2.43**	**2.43**	**2.72**	**2.72**	**4**

A： 正の系列相関あり，B： 系列相関の有無を判定不能，C： 系列相関なし
D： 系列相関の有無を判定不能，E： 負の系列相関あり

ただし，DW は 2 を中心に対象になっているので，データ数 n と定数項を除くパラメータ数 k' によって，dl と du が得られれば，5 つの領域を求めることができる。

次ページの表 7.2 に，より多くのデータ数 n と定数項を除くパラメータ数 k' との組み合わせを載せている。

表 7.2： ダービン・ワトソン統計量の 5 % 点の上限と下限

	$k'=1$		$k'=2$		$k'=3$		$k'=4$		$k'=5$		$k'=6$		$k'=7$		$k'=8$		$k'=9$		$k'=10$		$k'=11$		$k'=12$	
n	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du
6	0.610	1.400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0.700	1.356	0.467	1.896	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.367	2.287	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	0.927	1.324	0.758	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.315	2.645	0.203	3.004	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.380	2.506	0.268	2.832	0.171	3.149	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.444	2.390	0.328	2.692	0.230	2.985	0.147	3.266	—	—	—	—	—	—	—	—
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296	0.389	2.572	0.286	2.848	0.200	3.111	0.127	3.360	—	—	—	—	—	—
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220	0.447	2.471	0.343	2.727	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438	—	—	—	—
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157	0.502	2.388	0.398	2.624	0.304	2.860	0.222	3.090	0.155	3.304	0.098	3.503	—	—
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104	0.554	2.318	0.451	2.537	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184	0.138	3.378	0.087	3.557
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060	0.603	2.257	0.502	2.461	0.407	2.668	0.321	2.873	0.244	3.073	0.177	3.265	0.123	3.441
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023	0.649	2.206	0.549	2.396	0.456	2.589	0.369	2.783	0.290	2.974	0.220	3.159	0.160	3.335
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991	0.691	2.162	0.595	2.339	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885	0.263	3.063	0.200	3.234
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964	0.731	2.124	0.637	2.290	0.546	2.461	0.461	2.633	0.380	2.806	0.307	2.976	0.240	3.141
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940	0.769	2.090	0.677	2.246	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.735	0.349	2.897	0.281	3.057
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920	0.804	2.061	0.715	2.208	0.628	2.360	0.545	2.514	0.465	2.670	0.391	2.826	0.322	2.979
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902	0.837	2.035	0.750	2.174	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613	0.431	2.761	0.362	2.908
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886	0.868	2.013	0.784	2.144	0.702	2.280	0.621	2.419	0.544	2.560	0.470	2.702	0.400	2.844
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873	0.897	1.992	0.816	2.117	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513	0.508	2.649	0.438	2.784
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861	0.925	1.974	0.845	2.093	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.470	0.544	2.600	0.475	2.730
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850	0.951	1.958	0.874	2.071	0.798	2.188	0.723	2.309	0.650	2.431	0.578	2.555	0.510	2.680
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841	0.975	1.944	0.900	2.052	0.826	2.164	0.753	2.278	0.682	2.396	0.612	2.515	0.544	2.634
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833	0.998	1.931	0.926	2.034	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363	0.643	2.477	0.577	2.592

n は標本数，k' は定数項を除く説明変数の数とする。

（出所）http://www.stanford.edu/~clint/bench/dwcrit.htm

数値例：　今までと同じ数値例で，DW 比を計算する。

i	X_i	Y_i	X_i^2	X_iY_i	$\hat{Y}_i$	$\hat{u}_i$
1	5	4	25	20	4.0	0.0
2	1	1	1	1	1.2	−0.2
3	3	1	9	3	2.6	−1.6
4	2	3	4	6	1.9	1.1
5	4	4	16	16	3.3	0.7
合計	$\sum X_i$	$\sum Y_i$	$\sum X_i^2$	$\sum X_iY_i$	$\sum \hat{Y}_i$	$\sum \hat{u}_i$
	15	13	55	46	13	0.0
平均	$\overline{X}$	$\overline{Y}$				
	3	2.6				

$$
\begin{aligned}
DW &= \frac{\sum_{i=2}^{n}(\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2} \\
&= \frac{(0.0-(-0.2))^2 + (-0.2-(-1.6))^2 + (-1.6-1.1)^2 + (1.1-0.7)^2}{0.0^2 + (-0.2)^2 + (-1.6)^2 + 1.1^2 + 0.7^2} \\
&= \frac{0.04 + 1.96 + 7.29 + 0.16}{0.00 + 0.04 + 2.56 + 1.21 + 0.49} = \frac{9.45}{4.3} = 2.198
\end{aligned}
$$

推定結果の表記方法（数値例）：　回帰モデル：

$$
Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i
$$

の推定の結果， $\hat{\alpha} = 0.5$**，** $\hat{\beta} = 0.7$**，** $s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{1.5766667} = 1.25565$**，** $s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.1433333} = 0.3786$**，** $\dfrac{\hat{\alpha}}{s_{\hat{\alpha}}} = 0.398$**，** $\dfrac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = 1.849$**，** $s^2 = 1.433333$ (**すなわち，** $s = 1.197$)**，** $R^2 = 0.5326$**，** $\overline{R}^2 = 0.3768$**，** $DW = 2.198$ **を得た。**

これらをまとめて，

$$Y_i = \underset{(0.398)}{\mathbf{0.5}} + \underset{(1.849)}{\mathbf{0.7}} X_i$$

$$R^2 = 0.5326, \quad \overline{R}^2 = 0.3768, \quad s = 1.197, \quad DW = 2.198$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。

または，

$$Y_i = \underset{(1.256)}{\mathbf{0.5}} + \underset{(0.379)}{\mathbf{0.7}} X_i$$

$$R^2 = 0.5326, \quad \overline{R}^2 = 0.3768, \quad s = 1.197, \quad DW = 2.198$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は標準誤差を表すものとする。

のように書く。

7.1.3 系列相関は何が問題か？: 最小二乗推定量の分散について

簡単化のために，下記のように単回帰を考える。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i, \qquad n = 1, 2, \cdots, n$$

仮定：$\mathbf{E}(u_i) = 0$

$$\mathbf{V}(u_i) = \mathbf{E}(u_i^2) = \sigma^2$$

$i \neq j$ について，$\mathbf{Cov}(u_i, u_j) = \mathbf{E}(u_i u_j) = \sigma_{ij}$ $\Longleftarrow$ この仮定追加

系列相関を考慮せずに，今までで扱ってきた通常の最小二乗推定量は，

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_i (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_i (X_i - \overline{X})^2} = \sum_i \omega_i Y_i = \beta + \sum_i \omega_i u_i$$

である。ただし，$\omega_i = \dfrac{X_i - \overline{X}}{\sum_j (X_j - \overline{X})^2}$

$\hat{\beta}$ の期待値 $\mathbf{E}(\hat{\beta})$ は，

$$\mathbf{E}(\hat{\beta}) = \mathbf{E}(\beta + \sum_i \omega_i u_i) = \beta + \sum_i \omega_i \mathbf{E}(u_i) = \beta$$

となるので，誤差項 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ に系列相関があっても，$\hat{\beta}$ は不偏推定量となる。

$\hat{\beta}$ の分散 $\mathrm{V}(\hat{\beta})$ は，

$$\mathbf{V}(\hat{\beta}) = \mathbf{E}\Big((\hat{\beta}-\beta)^2\Big) = \mathbf{E}\Big((\sum_i \omega_i u_i)^2\Big) = \mathbf{E}\Big((\sum_i \omega_i u_i)(\sum_j \omega_j u_j)\Big)$$
$$= \mathbf{E}(\sum_i \sum_j \omega_i \omega_j u_i u_j) = \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \mathbf{E}(u_i u_j) = \sum_i \sum_j \sigma_{ij}\omega_i\omega_j$$

最初の等式は，$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta$ を利用して，分散の定義である。2 つ目の等式では，添字一つを i から j に変更している。最後の等式では，$\mathrm{E}(u_i u_j) = \sigma_{ij}$ を利用している。

$i = j$ のとき，$\sigma_{ij} = \sigma^2$ とする。すなわち，

$$\sum_i \sum_j \sigma_{ij}\omega_i\omega_j = \sigma^2 \sum_i \omega_i^2 + \sum_{\substack{i \\ i\neq j}} \sum_j \omega_i\omega_j\sigma_{ij} \neq \sigma^2 \sum_i \omega_i^2$$

となる。

以上から，$\hat{\beta}$ の分布は，

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sum_i \sum_j \sigma_{ij}\omega_i\omega_j)$$

となる。

さらに，標準化すると，

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\sum_i \sum_j \sigma_{ij}\omega_i\omega_j}} \sim N(0, 1)$$

となる。

したがって，u_1，u_2，$\cdots$，u_n に系列相関があるとき，共分散 σ_{ij} の項を無視して，

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma\sqrt{\sum_i \omega_i^2}} \sim N(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{これは間違い !!}$$

とはならないことに注意せよ（ただし，$\sigma^2=\sigma_{ii}$ としている）。

同様に，σ^2 を s^2 に置き換えて，

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{s\sqrt{\sum_i \omega_i^2}} \sim t(n-2) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{これも間違い !!}$$

ともならない。

ただし，s^2 は今まで通り，$s^2=\dfrac{1}{n-2}\displaystyle\sum_i \hat{u}_i^2=\dfrac{1}{n-2}\sum_i (Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X_i)^2$ としている。

u_1，u_2，$\cdots$，u_n に系列相関があるとき，通常の最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ の分散の推定量は，

$$\sum_i \sum_j s_{ij}\omega_i\omega_j = s^2 \sum_i \omega_i^2 + \sum_{\substack{i \\ i\neq j}} \sum_j \omega_i\omega_j s_{ij} \neq s^2 \sum_i \omega_i^2$$

とならなければならない。

s^2，s_{ij} は σ^2，σ_{ij} の推定量とする。

しかし，計量ソフトは $s^2 \sum_i \omega_i^2$ と計算する。

さらに，u_1，u_2，$\cdots$，u_n が互いに独立のときは $\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$ となるが，系列相関があるときは $\mathrm{E}(s^2) \neq \sigma^2$ となる。

まとめると，u_1，u_2，$\cdots$，u_n に系列相関があるとき，通常の計量ソフトで得られる最小二乗法による推定結果について，

- 係数推定量 $\hat{\beta}_j$ は β_j の不偏推定量，一致推定量となっている（正しく推定される）。
- 回帰式の標準誤差 s は正しく推定されない。
- 係数推定値 $\hat{\beta}_j$ の標準誤差 $s\sqrt{a_{jj}}$ も正しく推定されない。
- 係数推定値 $\hat{\beta}_j$ の t 値も正しくない。

となる。

このように，u_1，u_2，$\cdots$，u_n に系列相関があるとき，最小二乗法による推定結果を用いると，間違った信頼区間，間違った検定結果が得られる。