7.1.4　系列相関のもとで回帰式の推定

● 単回帰の場合：　回帰式が

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i,$$

のときの推定を考える。ただし，$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。

u_i を消去すると，

$$(Y_i - \alpha - \beta X_i) = \rho(Y_{i-1} - \alpha - \beta X_{i-1}) + \epsilon_i,$$

また，少し整理すると，

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = \alpha(1-\rho) + \beta(X_i - \rho X_{i-1}) + \epsilon_i,$$

となる。

$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とするので，最小二乗法を適用が可能となる。しかし，通常の最小二乗法と同様に，残差平方和を最小にするような推定量 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{\rho}$ を求めたいが，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{\rho}$ の解を (X_i, Y_i) の陽関数の形で書き表すことは不可能である。したがって，少し工夫が必要となる。

残差 $\hat{\epsilon}_i$ を次のように二通りの表し方をする。

- $\hat{\epsilon}_i = \hat{u}_i - \hat{\rho}\hat{u}_{i-1}$，**ただし，**$\hat{u}_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i$
- $\hat{\epsilon}_i = Y_i^* - \hat{\alpha}' - \hat{\beta}X_i^*$，**ただし，**$Y_i^* = Y_i - \hat{\rho}Y_{i-1}$，$X_i^* = X_i - \hat{\rho}X_{i-1}$，$\hat{\alpha}' = \hat{\alpha}(1-\hat{\rho})$

残差平方和 $\sum_{i=2}^{n}\hat{\epsilon}_i^2$ **を** $S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$ **とおく。**$S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$ **を最小にするような** $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{\rho}$ **を求める。**

すなわち，次の最小化問題を解く。

$$\min_{\hat{\alpha},\, \hat{\beta},\, \hat{\rho}} S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$$

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{\rho}$ **について** $S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$ **を微分してゼロとおいて，**

$$\frac{\partial S(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\rho})}{\partial\hat{\alpha}} = \frac{\partial S(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\rho})}{\partial\hat{\alpha}'}\frac{\partial\hat{\alpha}'}{\partial\hat{\alpha}} = -2(1-\hat{\rho})\sum_{i=2}^{n}(Y_i^* - \hat{\alpha}' - \hat{\beta}X_i^*) = 0$$

$$\frac{\partial S(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\rho})}{\partial \hat{\beta}} = -2\sum_{i=2}^{n} X_i^*(Y_i^* - \hat{\alpha}' - \hat{\beta}X_i^*) = 0$$

$$\frac{\partial S(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\rho})}{\partial \hat{\rho}} = -2\sum_{i=2}^{n} \hat{u}_{i-1}(\hat{u}_i - \hat{\rho}\hat{u}_{i-1}) = 0$$

の 3 つの連立方程式を解く。すなわち，

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=2}^{n}(X_i^* - \overline{X}_i^*)(Y_i^* - \overline{Y}_i^*)}{\sum_{i=2}^{n}(X_i^* - \overline{X}_i^*)^2}, \qquad \text{ただし，} Y_i^* = Y_i - \hat{\rho}Y_{i-1}\text{，} X_i^* = X_i - \hat{\rho}X_{i-1}$$

$$\hat{\alpha}' = \hat{\alpha}(1-\hat{\rho}) = \overline{Y}_i^* - \hat{\beta}\overline{X}_i^*$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{i-1}\hat{u}_i}{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{i-1}^2}, \qquad \text{ただし，} \hat{u}_i = Y_i - \hat{\alpha}' - \hat{\beta}X_i$$

を解くことになる。ただし，$\overline{X}_i^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} X_i^*$**，**$\overline{Y}_i^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} Y_i^*$ **とする（**$n-1$ **個のデータの平均）。**

計算の手順として，

(i) $\hat{\rho}$ に与えたもとで（最初は $\hat{\rho} = 0$），上記最初の 2 つの式を用いて，$(\hat{\alpha}', \hat{\beta})$ を求める。

(ii) $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ を与えたもとで，上記 3 つ目の式を用いて，$\hat{\rho}$ を求める。

(iii) 上記手順 (i) と (ii) を交互に，$(\hat{\alpha}', \hat{\beta}, \hat{\rho})$ が収束するまで繰り返す。

とする。この計算手順はコクラン＝オーカット法 (Cochrane-Orcutt estimation) と呼ばれる。

簡便法：ρ の求め方：　より簡単なもう一つの方法として，DW は近似的に $DW \approx 2(1 - \hat{\rho})$ と表されるので，DW から $\hat{\rho}$ を逆算して求める。そして，$Y_i^* = Y_i - \hat{\rho}Y_{i-1}$，$X_i^* = X_i - \hat{\rho}X_{i-1}$)

を新たな変数として，

$$Y_i^* = \alpha' + \beta X_i^* + \epsilon_i,$$

に最小二乗法を適用する。ただし，$\alpha' = \alpha(1-\hat{\rho})$ とする。

● 重回帰の場合：　より一般的に，回帰式が

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i,$$

の重回帰ときの推定を考える。ただし，$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。

u_i を消去すると，

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = \beta_1(X_{1i} - \rho X_{1,i-1}) + \beta_2(X_{2i} - \rho X_{2,i-1}) + \cdots + \beta_k(X_{ki} - \rho X_{k,i-1}) + \epsilon_i,$$

となる。残差平方和 $S(\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2,\ \cdots,\ \hat{\beta}_k,\ \hat{\rho}) = \sum_{i=2}^{n} \hat{\epsilon}_i^2$ を最小にする $\hat{\beta}_1$，$\hat{\beta}_2$，$\cdots$，$\hat{\beta}_k$，$\hat{\rho}$ を求める。ただし，$\hat{\epsilon}_i = Y_i^* - \hat{\beta}_1 X_{1i}^* - \hat{\beta}_2 X_{2i}^* - \ \cdots\ - \hat{\beta}_k X_{ki}^*$，または，$\hat{\epsilon}_i = \hat{u}_i - \hat{\rho}\hat{u}_{i-1}$ のどちらかで残差が表される。また，式中の記号は，$Y_i^* = Y_i - \hat{\rho} Y_{i-1}$，$X_{ji}^* = X_{ji} - \hat{\rho} X_{j,i-1}$，$j = 1, 2, \cdots, k$，$\hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \ \cdots\ - \hat{\beta}_k X_{ki}$ である。

最小化のための一階の条件は，

$$\frac{\partial S(\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2,\ \cdots,\ \hat{\beta}_k,\ \hat{\rho})}{\partial \hat{\beta}_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, k$$

$$\frac{\partial S(\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2,\ \cdots,\ \hat{\beta}_k,\ \hat{\rho})}{\partial \hat{\rho}} = 0$$

であり，具体的に計算すると，

$$\frac{\partial S(\hat\beta_1,\ \hat\beta_2,\ \cdots,\ \hat\beta_k,\ \hat\rho)}{\partial\hat\beta_j} = -2\sum_{i=2}^{n} X_{ji}^*(Y_i^* - \hat\beta_1 X_{1i}^* - \hat\beta_2 X_{2i}^* - \ \cdots\ - \hat\beta_k X_{ki}^*) = 0,$$

$$j = 1, 2, \cdots, k$$

$$\frac{\partial S(\hat\beta_1,\ \hat\beta_2,\ \cdots,\ \hat\beta_k,\ \hat\rho)}{\partial\hat\rho} = -2\sum_{i=2}^{n} \hat u_{i-1}(\hat u_i - \hat\rho\hat u_{i-1}) = 0$$

となる。$(k+1)$ 本の連立方程式から，$\hat\beta_1$，$\hat\beta_2$，$\cdots$，$\hat\beta_k$，$\hat\rho$ が得られる。単回帰のときと同様に，収束計算によって求めることになる。$\longrightarrow$ コクラン＝オーカット法 (Cochrane-Orcutt estimation)

簡便法：ρ の求め方（単回帰の場合と同じ手順）：　より簡単なもう一つの方法として，DW は近似的に $DW \approx 2(1-\hat\rho)$ と表されるので，DW から $\hat\rho$ を逆算して求める。

すなわち，まず，$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$ を最小二乗法で推定して残差 $\hat{u}_i$ を求める。そして，$\hat{\rho} = 1 - \frac{1}{2}DW$ として，$Y_i^* = Y_i - \hat{\rho} Y_{i-1}$，$X_{1i}^* = X_{1i} - \hat{\rho} X_{1,i-1}$，$X_{2i}^* = X_{2i} - \hat{\rho} X_{2,i-1}$，$\cdots$，$X_{ki}^* = X_{ki} - \hat{\rho} X_{k,i-1}$ を新たな変数を求め，

$$Y_i^* = \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^* + \cdots + \beta_k X_{ki}^* + \epsilon_i$$

に最小二乗法を適用する。

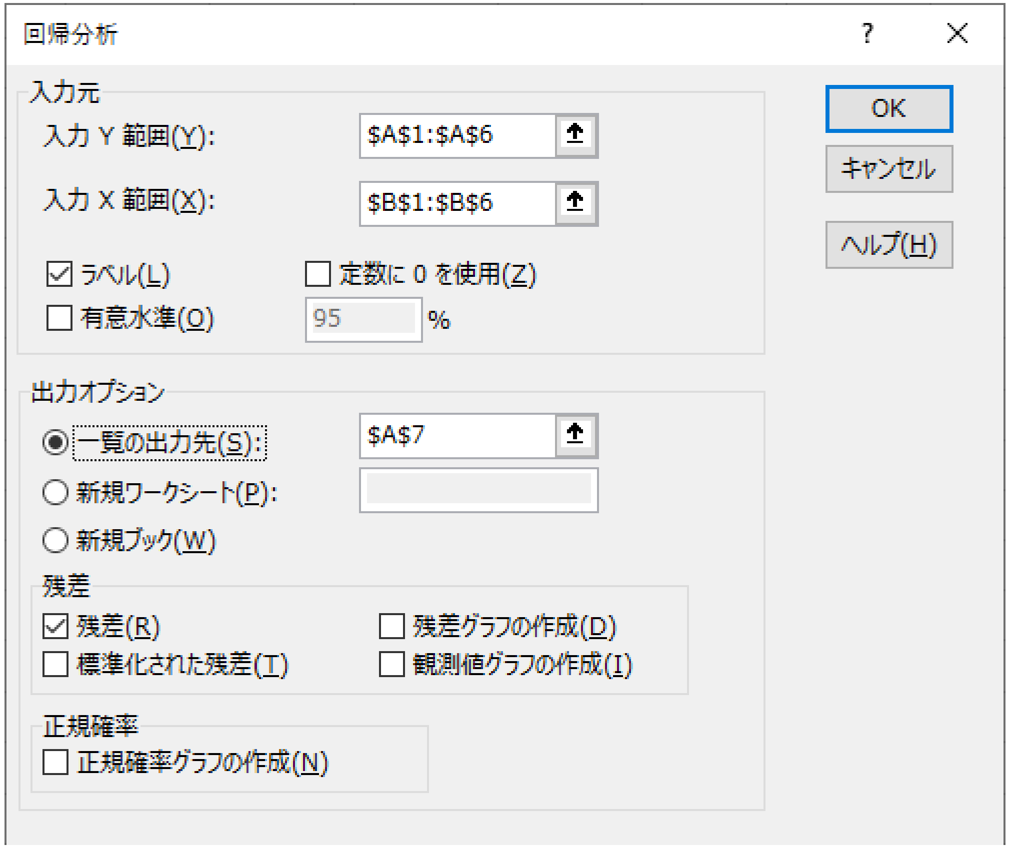
7.1.5　Excel 2019 による回帰分析（その 3：DW 比の計算）

5.3.12 節の推定結果（今までの数値例）の再掲（A 列が Y, B 列が X）

	A	B
1	y	x
2	4	5
3	1	1
4	1	3
5	3	2
6	4	4

残差と Y の予測値を出力するためには,「データ」,「データ分析」,「回帰分析」,「OK」と順に選択する。

下記のように，「入力 Y 範囲(Y)」，「入力 X 範囲(X)」，「一覧の出力先(S)」を入力して，さらに，「残差(R)」にチェックを入れて，「OK」ボタンを押す。



入力範囲のところで，1～6 行目を選んで，「ラベル(L)」にチェックを入れると，1 行目が変数名として入力される。

	A	B	C	D	E	F
7	概要					
8						
9	回帰統計					
10	重相関 R	0.7298				
11	重決定 R2	0.532609				
12	補正 R2	0.376812				
13	標準誤差	1.197219				
14	観測数	5				
15						
16	分散分析表					
17		自由度	変動	分散	された分	有意 F
18	回帰	1	4.9	4.9	3.418605	0.161594
19	残差	3	4.3	1.433333		
20	合計	4	9.2			
21						
22		係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%
23	切片	0.5	1.255654	0.398199	0.717129	-3.49605
24	x	0.7	0.378594	1.848947	0.161594	-0.50485
25						
26						
27						
28	残差出力					
29						
30	観測値	予測値: y	残差			
31	1	4	0			
32	2	1.2	-0.2			
33	3	2.6	-1.6			
34	4	1.9	1.1			
35	5	3.3	0.7			

← **予測値と残差が出力される。**

D32 で，「＝(c32-c31)^2」を入力して Enter キーを押す。D32 をコピーして，D33～D35 に張り付ける。

E31 で，「＝c31^2」を入力して Enter キーを押す。E31 をコピーして，E32～E35 に張り付ける。

下記のように計算される。

28	残差出力				
29					
30	観測値	予測値: Y	残差		
31	1	4	0		0
32	2	1.2	-0.2	0.04	0.04
33	3	2.6	-1.6	1.96	2.56
34	4	1.9	1.1	7.29	1.21
35	5	3.3	0.7	0.16	0.49

D36 に「＝sum(d32:d35)」，E36 に「＝sum(e31:e35)」とそれぞれ入力して Enter キーを押す。

DW 比の分子が D36，分母が E36 に計算される。さらに，F36 に「＝d36/e36」と入力して，Enter キーを押すと，DW 比が 2.197674 と計算される（次ページ）。

(*)　「＝sum(d32:d35)」は d32～d35 の総和を求めるコマンド

28	残差出力					
29						
30	観測値	予測値: Y	残差			
31	1	4	0		0	
32	2	1.2	-0.2	0.04	0.04	
33	3	2.6	-1.6	1.96	2.56	
34	4	1.9	1.1	7.29	1.21	
35	5	3.3	0.7	0.16	0.49	
36				9.45	4.3	2.197674

D36，E36，F36 と計算したが，D36，E36 を計算せずに，まとめて，F36 に「＝sum(d32:d35)/sum(e31:e35)」と入力しても同じ結果が得られる。

●Excel の問題点：

DW 比を求めるためには，回帰分析の度に，残差を出力させて自分で計算しなければならない。

→ DW 比は自動的に出力してくれない。かなり面倒！！

→ 以前紹介した gretl を使う。

7.1.6　gretl による回帰分析

http://gretl.sourceforge.net/ からダウンロードしてインストール

Windows 版，Mac 版，Linux 版などが用意されている。

Windows 版の場合，http://gretl.sourceforge.net/win32/ から

gretl-2020e-64.exe または gretl-2020e-32.exe

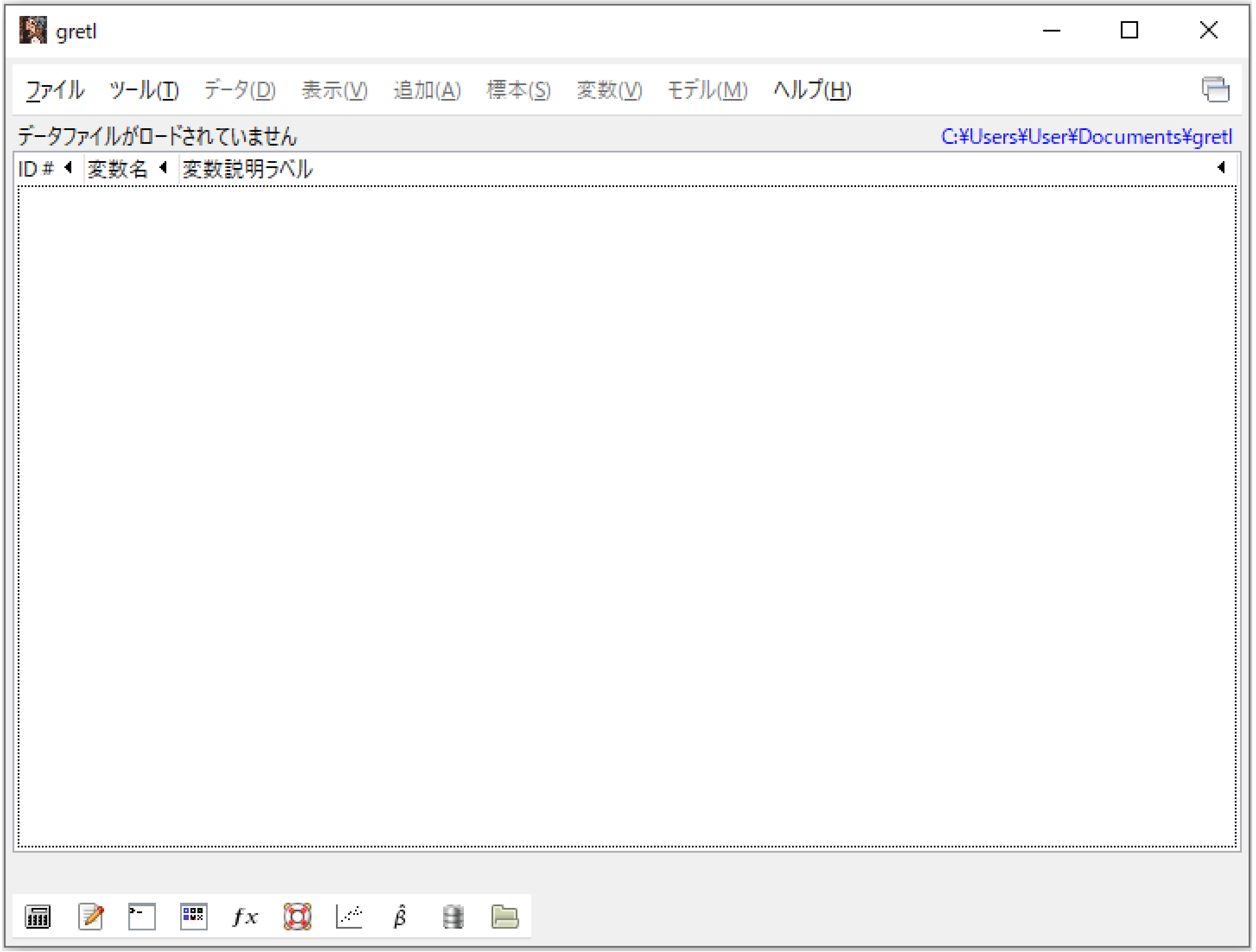
をインストールする。

64 ビット版の Windows であれば gretl-2020e-64.exe がインストール可能。

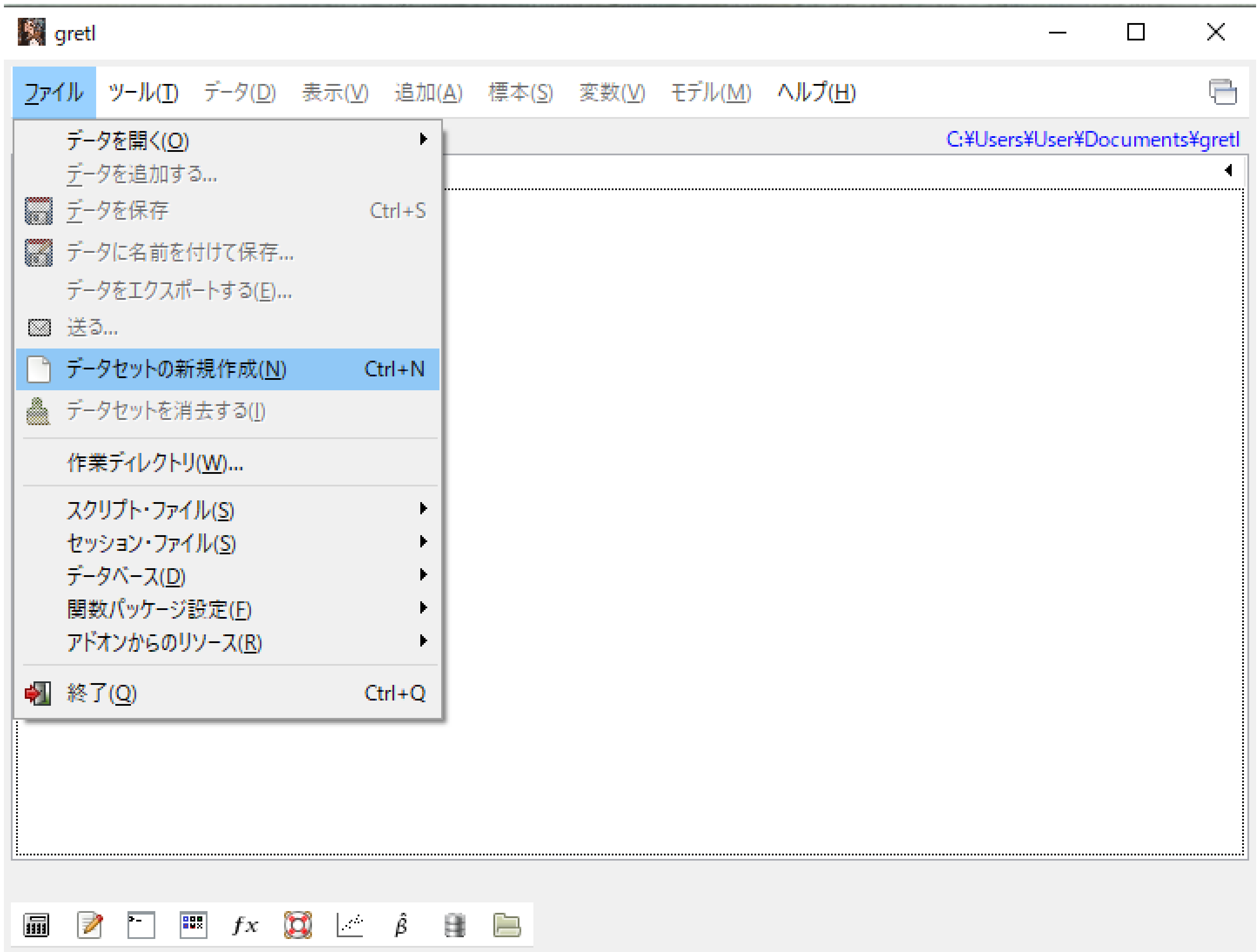
よく分からなければ，gretl-2020e-32.exe をインストールするように。

インストール後，デスクトップに

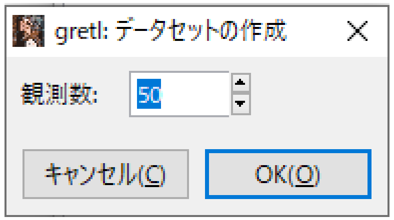
というアイコンができる。これを選択すると，次の画面が出る。



Excel でデータ・ファイルを作成して，gretl で読む方法もあるが，まず，データの入力の仕方を説明する。

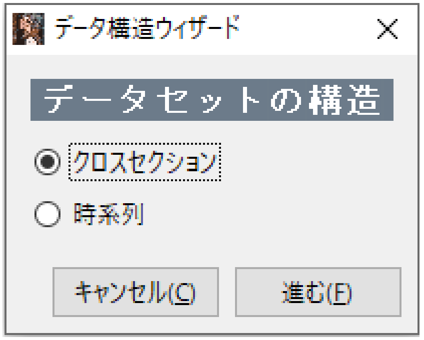


「ファイル」,「データセットの新規作成(N)」を選択すると，下記の画面となる。

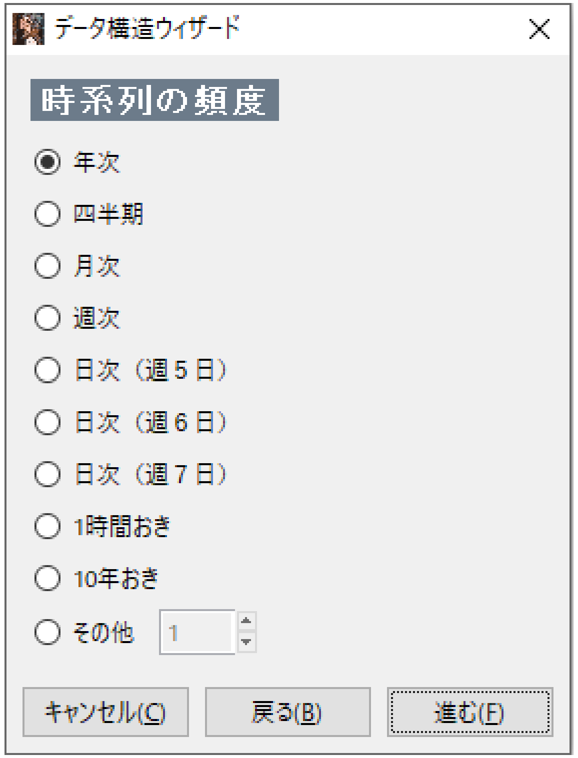


今までの数値例を使いたいので，「50」のところに「5」にして，Enter キーを押すと，

下の画面が出てくる。



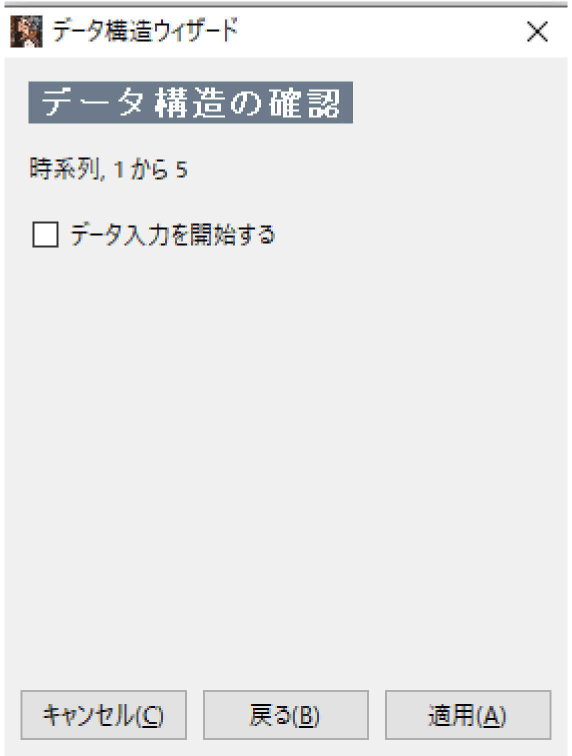
DW 比の例を示したいので，「時系列」にチェックを入れて，「進む(F)」を選択する。



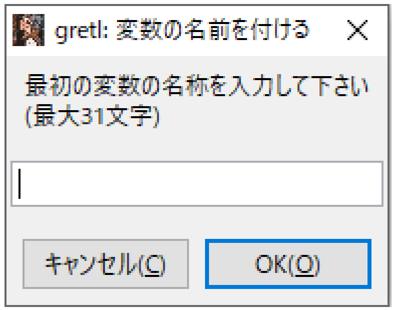
何を選んでも推定結果には影響しない。

今回は「その他」にチェックを入れて「進む(F)」を選択する。

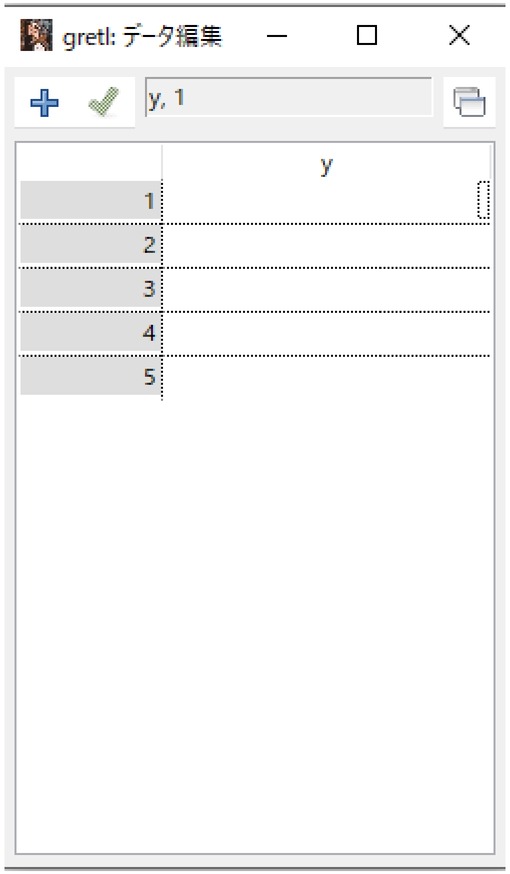
何も変更せずに，そのまま「進む(F)」を選択する。



「データ入力を開始する」にチェックを入れて，「適用(A)」を選択する。



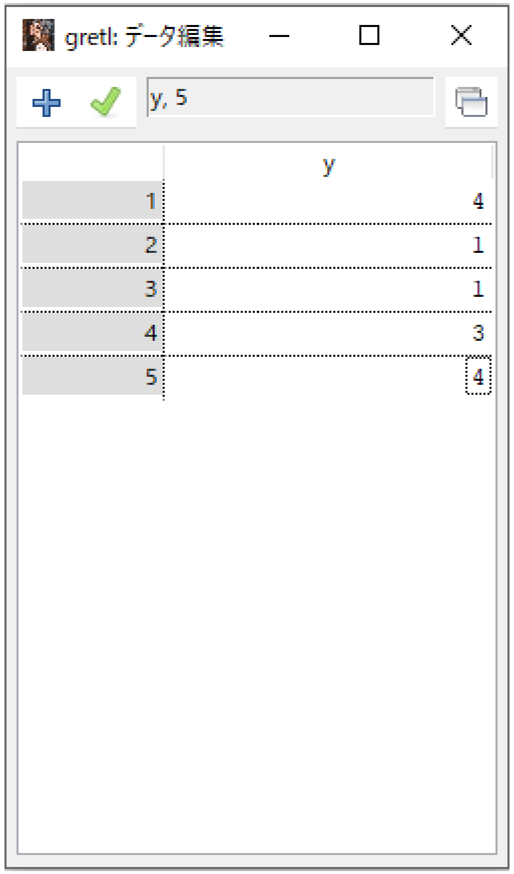
変数名を入力する。何でもよいが，ここでは「y」を入力して，「OK」を選択する。



右のように，

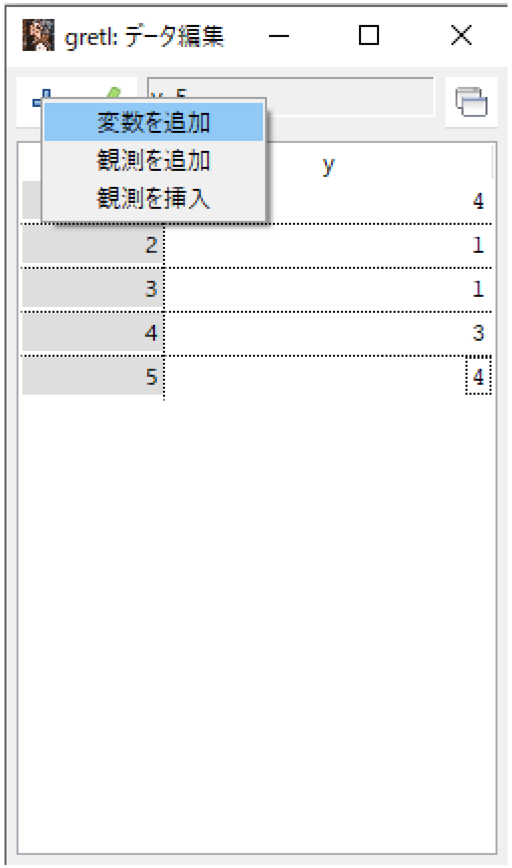
順番に，4，1，1，3，4

を入力する。



ｙのデータを入力し終わると，

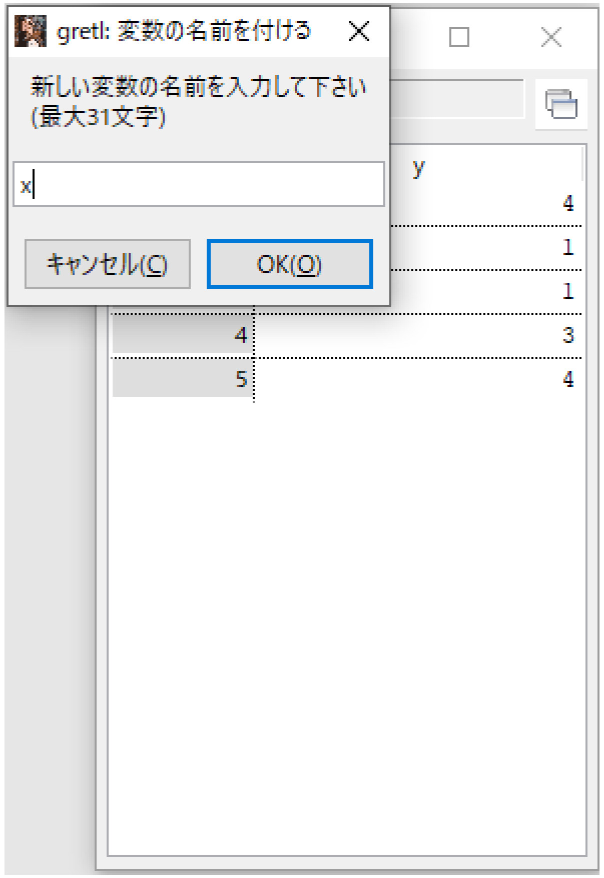
左上の「＋」を選択する。

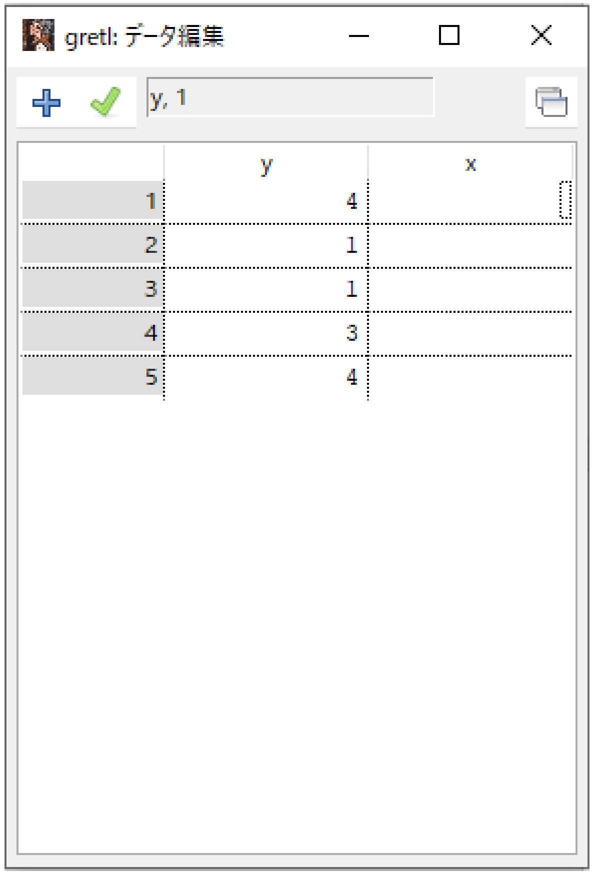


「変数を追加」を選択して，

右画面で x の変数名にして，

「OK」を選択する。

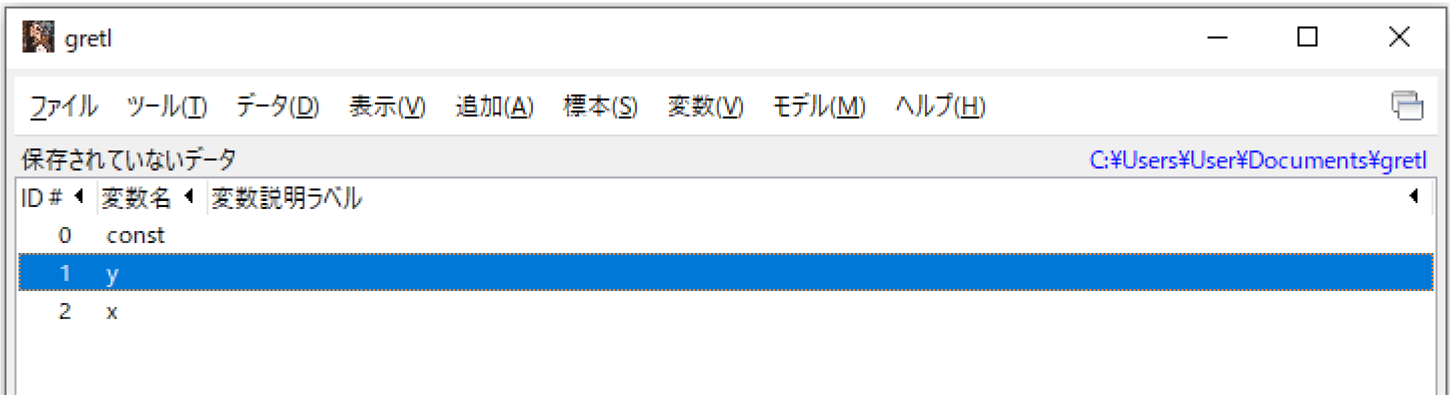




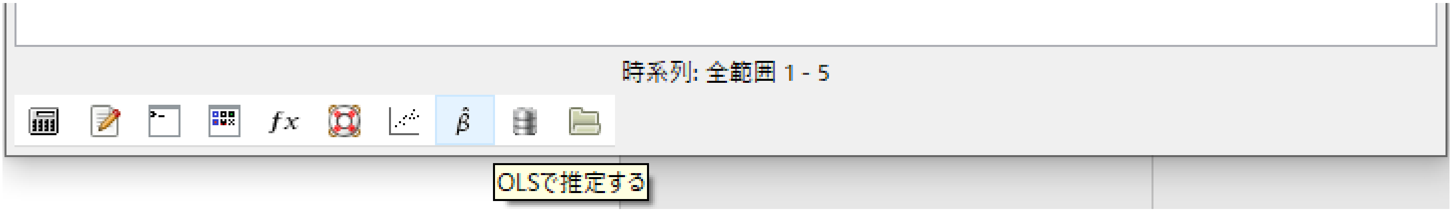
x の列に，5，1，3，2，4 を入力後，

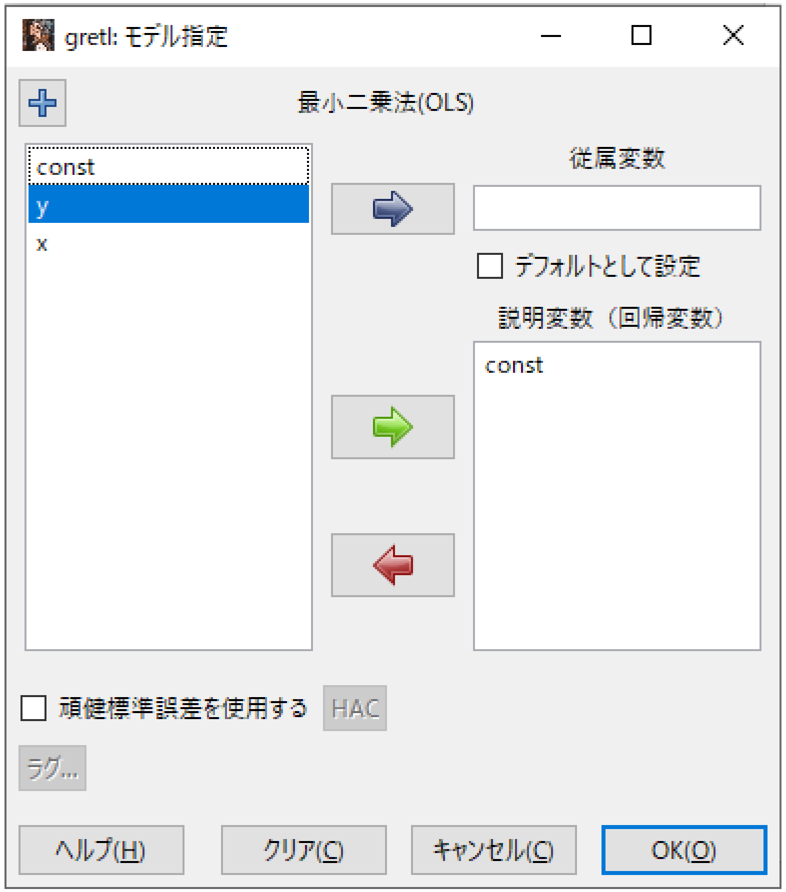
左上の「✓」を選択して，データ入力を終える。

下記のように変数名リストが出てくる。



●推定方法　その１：同じ画面の下の方に下記の画面があり，右から３番目の「$\hat{\beta}$」(「OLS で推定する」) を選択する。

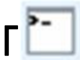


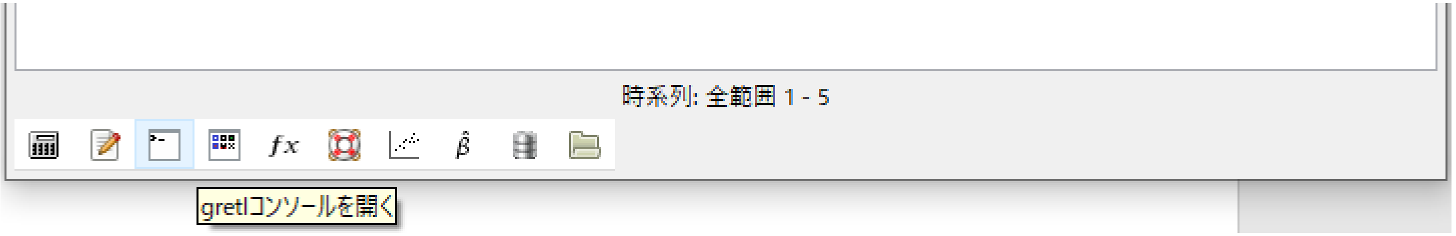


y を選択して「」を選択して従属変数に，

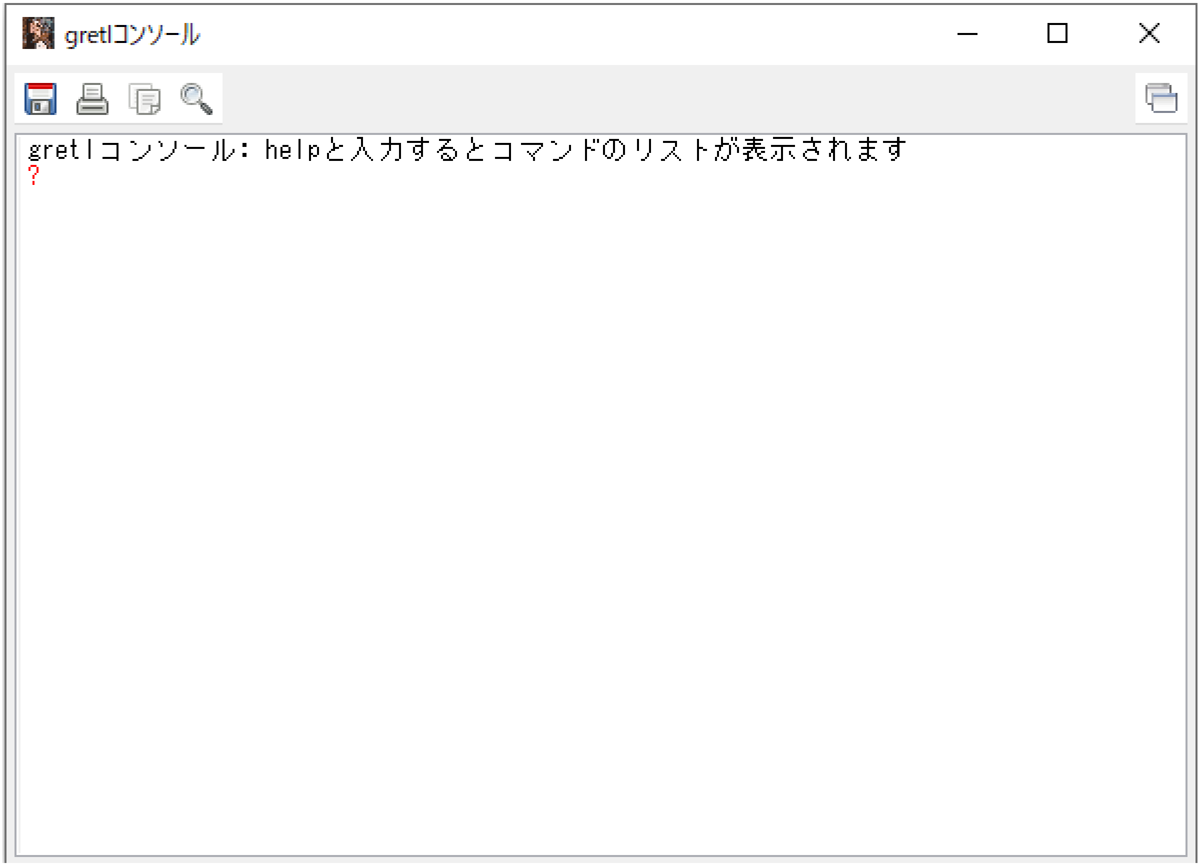
次に， x を選択して「」を選択して説明変数にする。

下記の画面となる。「OK」を選択すると，推定結果が右のように出力される。

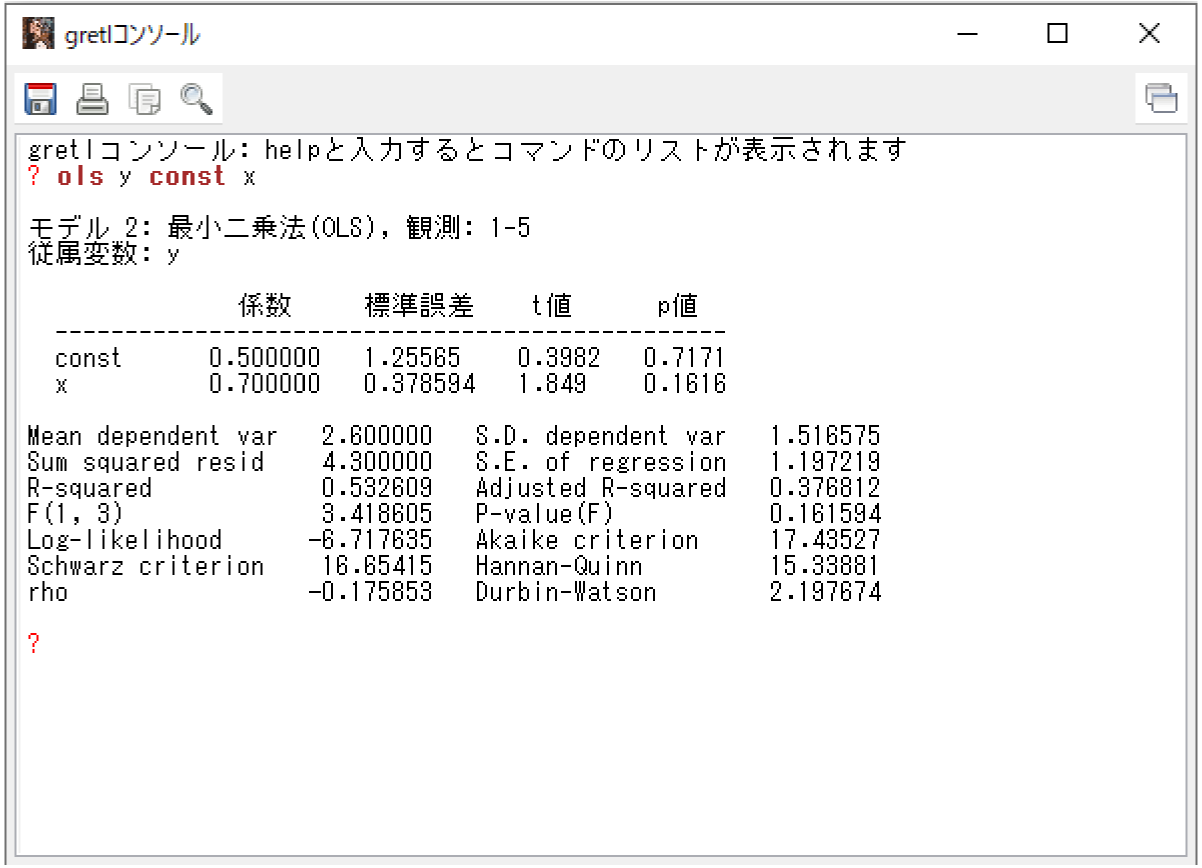
●推定方法　その２：　左から３番目の「」(「gretl コンソールを開く」) を選択する。



下記の画面が出る。



? の後に　ols y const x と打って，Enter キーを押すと，次ページの結果が出力される。



ols と const は自動的に赤色で表示される。赤字はコマンド，予約語などである。

ols ＝ ordinary least squares （最小二乗法）

const ＝ constant term （定数項）

ols y const x は $Y_i=\alpha+\beta X_i+u_i$ を最小二乗法で推定するという意味（被説明変数，説明変数と並べて書く）。