

7.1.4 系列相関のもとで回帰式の推定

単回帰の場合： 回帰式が

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i,$$

のときの推定を考える。ただし， $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。

u_i を消去すると，

$$(Y_i - \alpha - \beta X_i) = \rho(Y_{i-1} - \alpha - \beta X_{i-1}) + \epsilon_i,$$

また，少し整理すると，

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = \alpha(1 - \rho) + \beta(X_i - \rho X_{i-1}) + \epsilon_i,$$

となる。

$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ は互いに独立とするので，最小二乗法を適用が可能となる。しかし，通常の最小二乗法と同様に，残差平方和を最小にするような推定量 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho}$ を求めたいが， $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho}$ の解を (X_i, Y_i) の陽関数の形で書き表すことは不可能である。したがって，少し工夫が必要となる。

残差 $\hat{\epsilon}_i$ を次のように二通りの表し方をする。

- $\hat{\epsilon}_i = \hat{u}_i - \hat{\rho}\hat{u}_{i-1}$, ただし , $\hat{u}_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i$
- $\hat{\epsilon}_i = Y_i^* - \hat{\alpha}' - \hat{\beta}X_i^*$, ただし , $Y_i^* = Y_i - \hat{\rho}Y_{i-1}$, $X_i^* = X_i - \hat{\rho}X_{i-1}$, $\hat{\alpha}' = \hat{\alpha}(1 - \hat{\rho})$

残差平方和 $\sum_{i=2}^n \hat{\epsilon}_i^2$ を $S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$ とおく。 $S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$ を最小にするような $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\rho}$ を求める。

すなわち , 次の最小化問題を解く。

$$\min_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho}} S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$$

$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\rho}$ について $S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$ を微分してゼロとおいて ,

$$\frac{\partial S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})}{\partial \hat{\alpha}} = \frac{\partial S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})}{\partial \hat{\alpha}'} \frac{\partial \hat{\alpha}'}{\partial \hat{\alpha}} = -2(1 - \hat{\rho}) \sum_{i=2}^n (Y_i^* - \hat{\alpha}' - \hat{\beta}X_i^*) = 0$$

$$\frac{\partial S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})}{\partial \hat{\beta}} = -2 \sum_{i=2}^n X_i^* (Y_i^* - \hat{\alpha}' - \hat{\beta} X_i^*) = 0$$

$$\frac{\partial S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})}{\partial \hat{\rho}} = -2 \sum_{i=2}^n \hat{u}_{i-1} (\hat{u}_i - \hat{\rho} \hat{u}_{i-1}) = 0$$

の3つの連立方程式を解く。すなわち，

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=2}^n (X_i^* - \bar{X}_i^*)(Y_i^* - \bar{Y}_i^*)}{\sum_{i=2}^n (X_i^* - \bar{X}_i^*)^2}, \quad \text{ただし, } Y_i^* = Y_i - \hat{\rho} Y_{i-1}, \quad X_i^* = X_i - \hat{\rho} X_{i-1}$$

$$\hat{\alpha}' = \hat{\alpha}(1 - \hat{\rho}) = \bar{Y}_i^* - \hat{\beta} \bar{X}_i^*$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=2}^n \hat{u}_{i-1} \hat{u}_i}{\sum_{i=2}^n \hat{u}_{i-1}^2}, \quad \text{ただし, } \hat{u}_i = Y_i - \hat{\alpha}' - \hat{\beta} X_i$$

を解くことになる。ただし， $\bar{X}_i^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n X_i^*$ ， $\bar{Y}_i^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n Y_i^*$ とする（ $n-1$ 個のデータの平均）。

計算の手順として、

(i) $\hat{\rho}$ に与えたもとで (最初は $\hat{\rho} = 0$)、上記最初の 2 つの式を用いて、 $(\hat{\alpha}', \hat{\beta})$ を求める。

(ii) $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ を与えたもとで、上記 3 つ目の式を用いて、 $\hat{\rho}$ を求める。

(iii) 上記手順 (i) と (ii) を交互に、 $(\hat{\alpha}', \hat{\beta}, \hat{\rho})$ が収束するまで繰り返す。

とする。この計算手順はコ克蘭 = オーカット法 (Cochrane-Orcutt estimation) と呼ばれる。

簡便法： ρ の求め方： より簡単なもう一つの方法として、 DW は近似的に $DW \approx 2(1 - \hat{\rho})$ と表されるので、 DW から $\hat{\rho}$ を逆算して求める。そして、 $Y_i^* = Y_i - \hat{\rho}Y_{i-1}$ 、 $X_i^* = X_i - \hat{\rho}X_{i-1}$

を新たな変数として，

$$Y_i^* = \alpha' + \beta X_i^* + \epsilon_i,$$

に最小二乗法を適用する。ただし， $\alpha' = \alpha(1 - \hat{\rho})$ とする。

重回帰の場合： より一般的に，回帰式が

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i,$$

の重回帰ときの推定を考える。ただし， $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。

u_i を消去すると,

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = \beta_1(X_{1i} - \rho X_{1,i-1}) + \beta_2(X_{2i} - \rho X_{2,i-1}) + \cdots + \beta_k(X_{ki} - \rho X_{k,i-1}) + \epsilon_i,$$

となる。残差平方和 $S(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k, \hat{\rho}) = \sum_{i=2}^n \hat{\epsilon}_i^2$ を最小にする $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k, \hat{\rho}$ を求める。ただし, $\hat{\epsilon}_i = Y_i^* - \hat{\beta}_1 X_{1i}^* - \hat{\beta}_2 X_{2i}^* - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki}^*$, または, $\hat{\epsilon}_i = \hat{u}_i - \hat{\rho} \hat{u}_{i-1}$ のどちらかで残差が表される。また, 式中の記号は, $Y_i^* = Y_i - \hat{\rho} Y_{i-1}$, $X_{ji}^* = X_{ji} - \hat{\rho} X_{j,i-1}$, $j = 1, 2, \dots, k$, $\hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki}$ である。

最小化のための一階の条件は,

$$\frac{\partial S(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k, \hat{\rho})}{\partial \hat{\beta}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$\frac{\partial S(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k, \hat{\rho})}{\partial \hat{\rho}} = 0$$

であり，具体的に計算すると，

$$\frac{\partial S(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k, \hat{\rho})}{\partial \hat{\beta}_j} = -2 \sum_{i=2}^n X_{ji}^* (Y_i^* - \hat{\beta}_1 X_{1i}^* - \hat{\beta}_2 X_{2i}^* - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}^*) = 0,$$

$j = 1, 2, \dots, k$

$$\frac{\partial S(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k, \hat{\rho})}{\partial \hat{\rho}} = -2 \sum_{i=2}^n \hat{u}_{i-1} (\hat{u}_i - \hat{\rho} \hat{u}_{i-1}) = 0$$

となる。(k + 1)本の連立方程式から， $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k, \hat{\rho}$ が得られる。単回帰のときと同様に，収束計算によって求めることになる。→ コクラン = オーカット法 (Cochrane-Orcutt estimation)

簡便法： ρ の求め方(単回帰の場合と同じ手順)：より簡単なもう一つの方法として，DWは近似的に $DW \approx 2(1 - \hat{\rho})$ と表されるので，DWから $\hat{\rho}$ を逆算して求める。

すなわち、まず、 $Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$ を最小二乗法で推定して残差 \hat{u}_i を求める。そして、 $\hat{\rho} = 1 - \frac{1}{2}DW$ として、 $Y_i^* = Y_i - \hat{\rho}Y_{i-1}$ 、 $X_{1i}^* = X_{1i} - \hat{\rho}X_{1,i-1}$ 、 $X_{2i}^* = X_{2i} - \hat{\rho}X_{2,i-1}$ 、 \cdots 、 $X_{ki}^* = X_{ki} - \hat{\rho}X_{k,i-1}$ を新たな変数を求め、

$$Y_i^* = \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^* + \cdots + \beta_k X_{ki}^* + \epsilon_i$$

に最小二乗法を適用する。

7.1.5 Excel 2019 による回帰分析（その3：DW比の計算）

5.3.12 節の推定結果（今までの数値例）の再掲（A列がY，B列がX）

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | y | x |
| 2 | 4 | 5 |
| 3 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 3 |
| 5 | 3 | 2 |
| 6 | 4 | 4 |

残差とYの予測値を出力するためには、「データ」、「データ分析」、「回帰分析」、「OK」と順に選択する。

下記のように、「入力 Y 範囲(Y)」、「入力 X 範囲(X)」、「一覧の出力先(S)」を入力して、さらに、「残差(R)」にチェックを入れて、「OK」ボタンを押す。

回帰分析

入力元

入力 Y 範囲(Y): \$A\$1:\$A\$6 ↑

入力 X 範囲(X): \$B\$1:\$B\$6 ↑

ラベル(L) 定数に 0 を使用(Z)

有意水準(Q) 95 %

出力オプション

一覧の出力先(S): \$A\$7 ↑

新規ワークシート(P):

新規ブック(W)

残差

残差(R) 残差グラフの作成(D)

標準化された残差(I) 観測値グラフの作成(I)

正規確率

正規確率グラフの作成(N)

OK

キャンセル

ヘルプ(H)

入力範囲のところで、1~6 行目を選んで、「ラベル(L)」にチェックを入れると、1 行目が変数名として入力される。

| | A | B | C | D | E | F |
|----|--------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 7 | 概要 | | | | | |
| 8 | | | | | | |
| 9 | 回帰統計 | | | | | |
| 10 | 重相関 R | 0.7298 | | | | |
| 11 | 重決定 R2 | 0.532609 | | | | |
| 12 | 補正 R2 | 0.376812 | | | | |
| 13 | 標準誤差 | 1.197219 | | | | |
| 14 | 観測数 | 5 | | | | |
| 15 | | | | | | |
| 16 | 分散分析表 | | | | | |
| 17 | | 自由度 | 変動 | 分散 | 割された分散 | 有意 F |
| 18 | 回帰 | 1 | 4.9 | 4.9 | 3.418605 | 0.161594 |
| 19 | 残差 | 3 | 4.3 | 1.433333 | | |
| 20 | 合計 | 4 | 9.2 | | | |
| 21 | | | | | | |
| 22 | | 係数 | 標準誤差 | t | P-値 | 下限 95% |
| 23 | 切片 | 0.5 | 1.255654 | 0.398199 | 0.717129 | -3.49605 |
| 24 | x | 0.7 | 0.378594 | 1.848947 | 0.161594 | -0.50485 |
| 25 | | | | | | |
| 26 | | | | | | |
| 27 | | | | | | |
| 28 | 残差出力 | | | | | |
| 29 | | | | | | |
| 30 | 観測値 | 予測値: y | 残差 | | | |
| 31 | 1 | 4 | 0 | | | |
| 32 | 2 | 1.2 | -0.2 | | | |
| 33 | 3 | 2.6 | -1.6 | | | |
| 34 | 4 | 1.9 | 1.1 | | | |
| 35 | 5 | 3.3 | 0.7 | | | |

← 予測値と残差が出力される。

D32 で、「 $= (c32-c31)^2$ 」を入力して Enter キーを押す。D32 をコピーして、D33~D35 に張り付ける。

E31 で、「 $=c31^2$ 」を入力して Enter キーを押す。E31 をコピーして、E32~E35 に張り付ける。

下記のように計算される。

| | | | | | |
|----|------|--------|------|------|------|
| 28 | 残差出力 | | | | |
| 29 | | | | | |
| 30 | 観測値 | 予測値: Y | 残差 | | |
| 31 | 1 | 4 | 0 | | 0 |
| 32 | 2 | 1.2 | -0.2 | 0.04 | 0.04 |
| 33 | 3 | 2.6 | -1.6 | 1.96 | 2.56 |
| 34 | 4 | 1.9 | 1.1 | 7.29 | 1.21 |
| 35 | 5 | 3.3 | 0.7 | 0.16 | 0.49 |

D36 に「 $=\text{sum}(d32:d35)$ 」、E36 に「 $=\text{sum}(e31:e35)$ 」とそれぞれ入力して Enter キーを押す。

DW 比の分子が D36, 分母が E36 に計算される。さらに、F36 に「 $=d36/e36$ 」と入力して、Enter キーを押すと、DW 比が 2.197674 と計算される (次ページ)。

(*) 「 $=\text{sum}(d32:d35)$ 」は d32~d35 の総和を求めるコマンド

| | | | | | | |
|----|------|--------|------|------|------|----------|
| 28 | 残差出力 | | | | | |
| 29 | | | | | | |
| 30 | 観測値 | 予測値: Y | 残差 | | | |
| 31 | 1 | 4 | 0 | | 0 | |
| 32 | 2 | 1.2 | -0.2 | 0.04 | 0.04 | |
| 33 | 3 | 2.6 | -1.6 | 1.96 | 2.56 | |
| 34 | 4 | 1.9 | 1.1 | 7.29 | 1.21 | |
| 35 | 5 | 3.3 | 0.7 | 0.16 | 0.49 | |
| 36 | | | | 9.45 | 4.3 | 2.197674 |

D36, E36, F36 と計算したが、D36, E36 を計算せずに、まとめて、F36 に「 $=\text{sum}(d32:d35)/\text{sum}(e31:e35)$ 」と入力しても同じ結果が得られる。

●Excel の問題点：

DW 比を求めるためには、回帰分析の度に、残差を出力させて自分で計算しなければならない。

→ DW 比は自動的に出力してくれない。かなり面倒！！

→ 以前紹介した gretl を使う。

7.1.6 gretl による回帰分析

<http://gretl.sourceforge.net/> からダウンロードしてインストール

Windows 版, Mac 版, Linux 版などが用意されている。

Windows 版の場合, <http://gretl.sourceforge.net/win32/> から

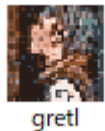
`gretl-2020e-64.exe` または `gretl-2020e-32.exe`

をインストールする。

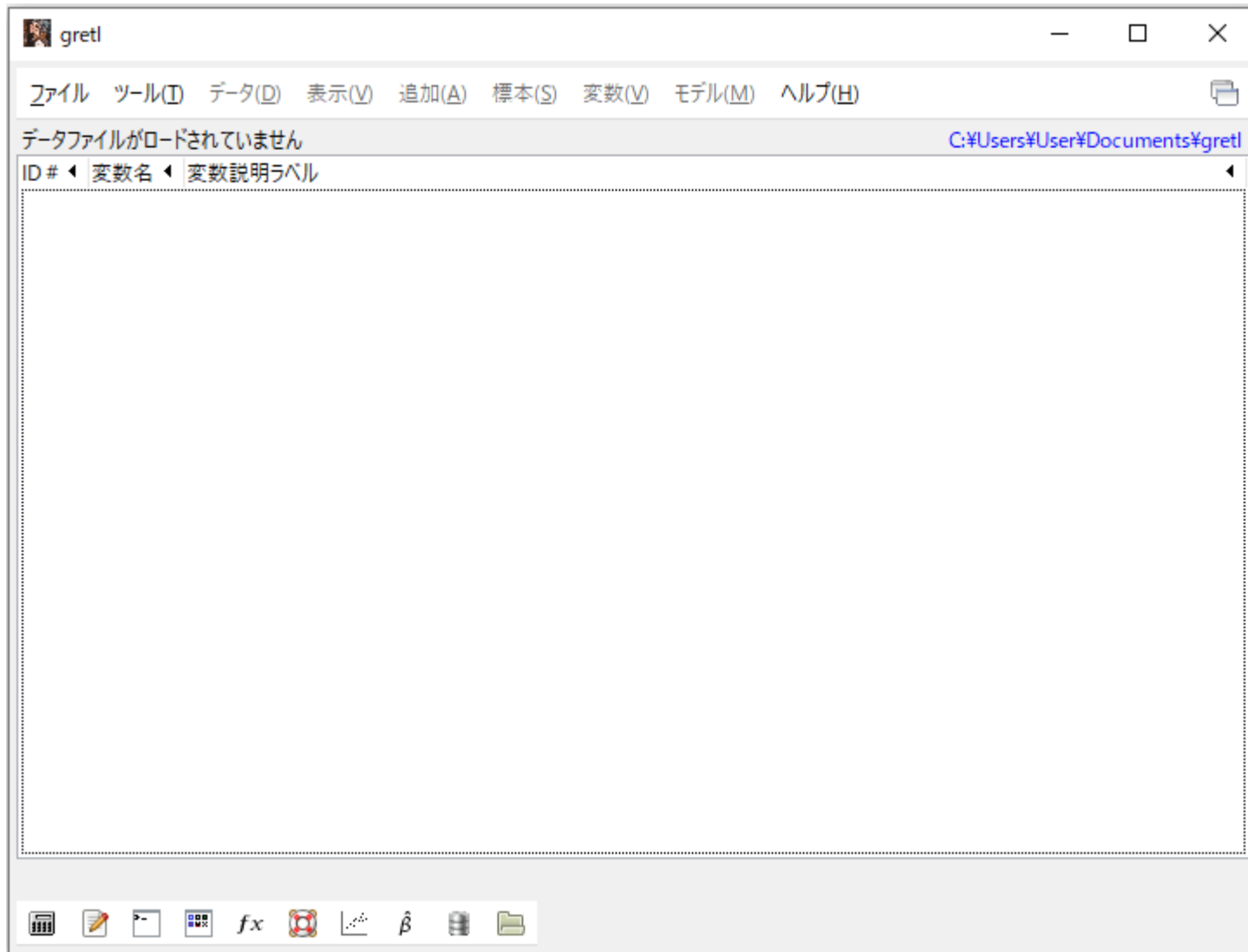
64 ビット版の Windows であれば `gretl-2020e-64.exe` がインストール可能。

よく分からなければ, `gretl-2020e-32.exe` をインストールするように。

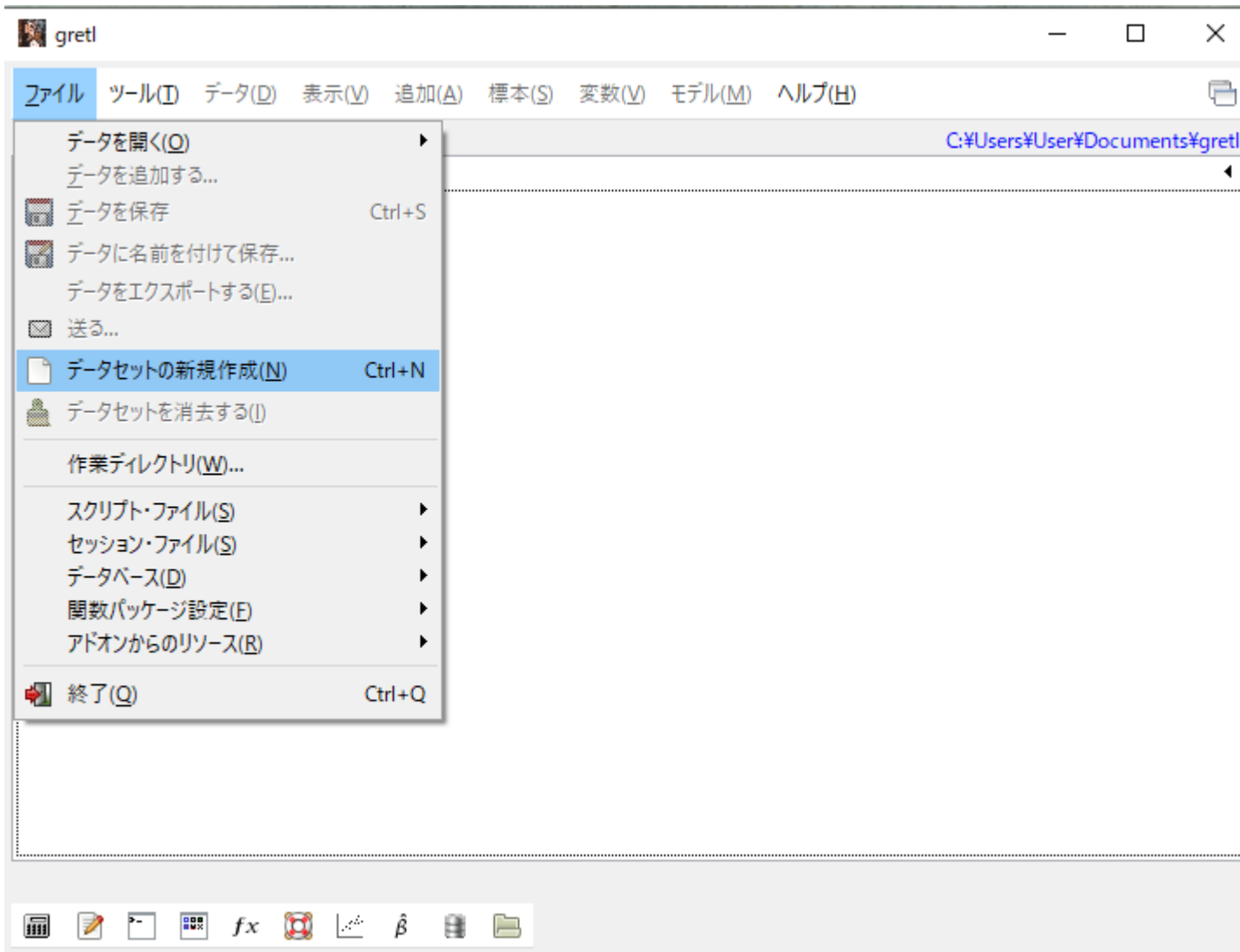
インストール後, デスクトップに



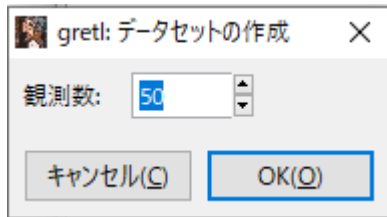
というアイコンができる。これを選択すると, 次の画面が出る。



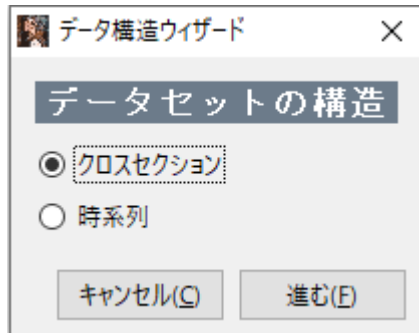
Excel でデータ・ファイルを作成して、gretl で読む方法もあるが、まず、データの入力の仕方を説明する。



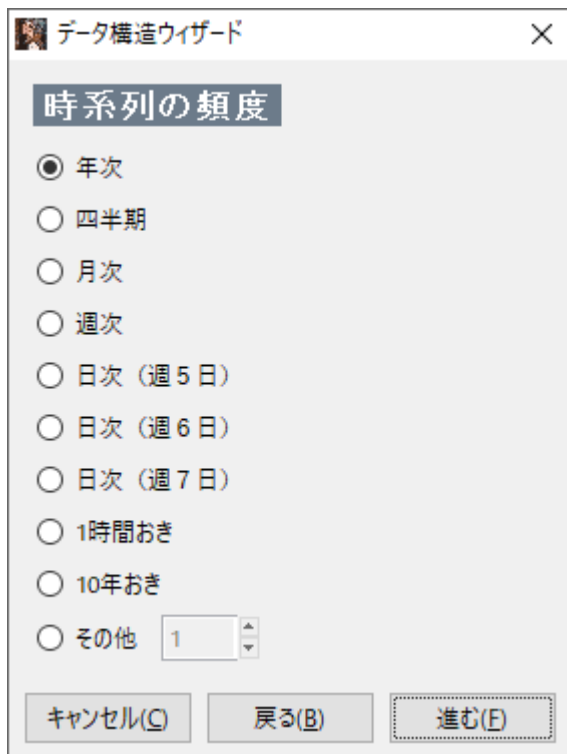
「ファイル」、「データセットの新規作成(N)」を選択すると、下記の画面となる。



今までの数値例を使いたいので、「50」のところに「5」にして、Enter キーを押すと、下の画面が出てくる。



DW 比の例を示したいので、「時系列」にチェックを入れて、「進む(F)」を選択する。

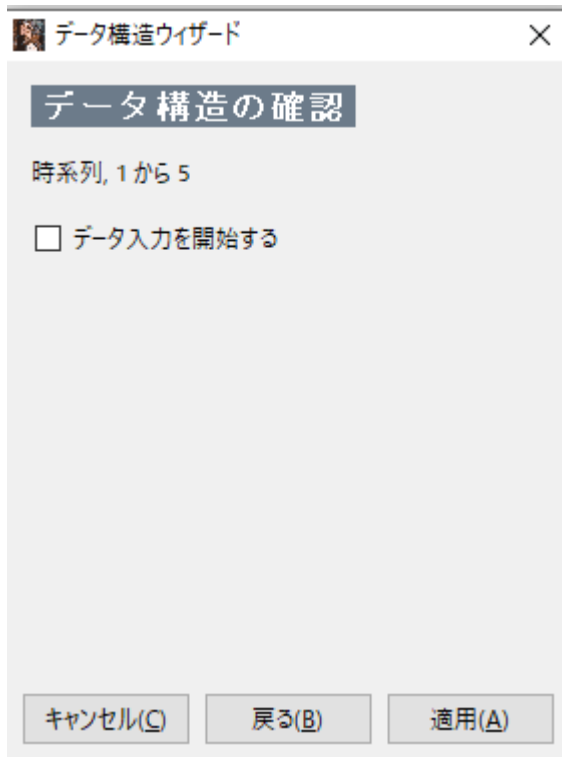


何を選んでも推定結果には影響しない。

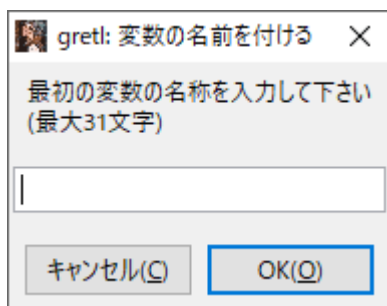
今回は「その他」にチェックを入れて「進む(F)」を選択する。



何も変更せずに，そのまま「進む(F)」を選択する。



「データ入力を開始する」にチェックを入れて、「適用(A)」を選択する。



変数名を入力する。何でもよいが、ここでは「y」を入力して、「OK」を選択する。

The screenshot shows the gretl data editor window titled "gretl: データ編集". The top bar contains a blue plus sign, a green checkmark, and the text "y, 1". Below the bar is a table with 5 rows and 1 column labeled "y". The rows are numbered 1 to 5 in the left margin, and the cells are currently empty.

| | y |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |

右のように、
順番に、4, 1, 1, 3, 4
を入力する。

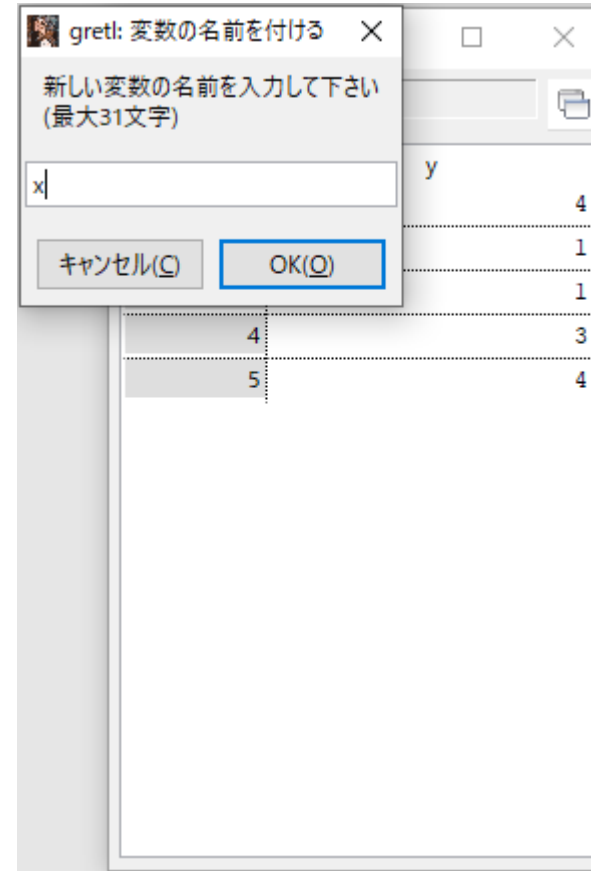
The screenshot shows the gretl data editor window titled "gretl: データ編集". The top bar contains a blue plus sign, a green checkmark, and the text "y, 5". Below the bar is a table with 5 rows and 1 column labeled "y". The rows are numbered 1 to 5 in the left margin, and the cells contain the values 4, 1, 1, 3, and 4 respectively.

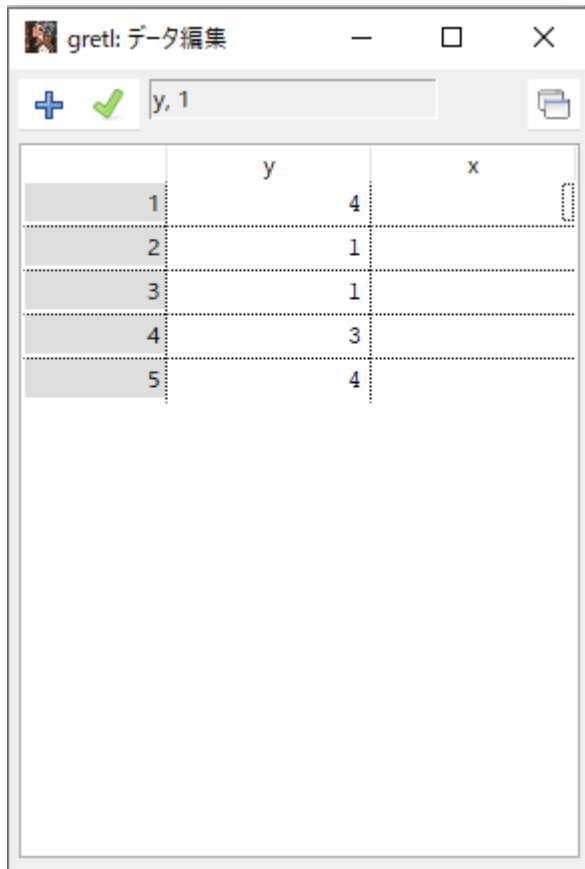
| | y |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |
| 4 | 3 |
| 5 | 4 |

y のデータを入力し終わると、
左上の「+」を選択する。



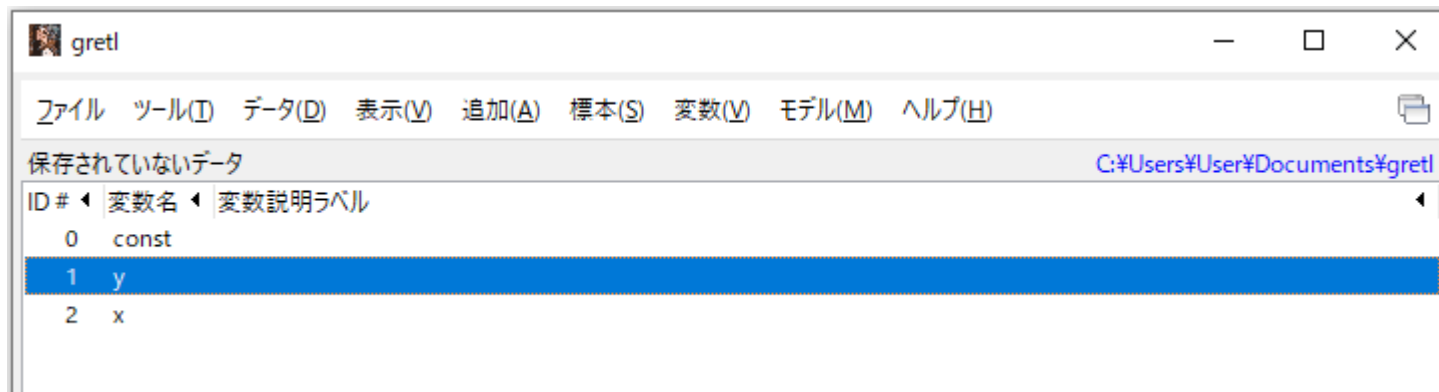
「変数を追加」を選択して、
右画面で x の変数名にして、
「OK」を選択する。



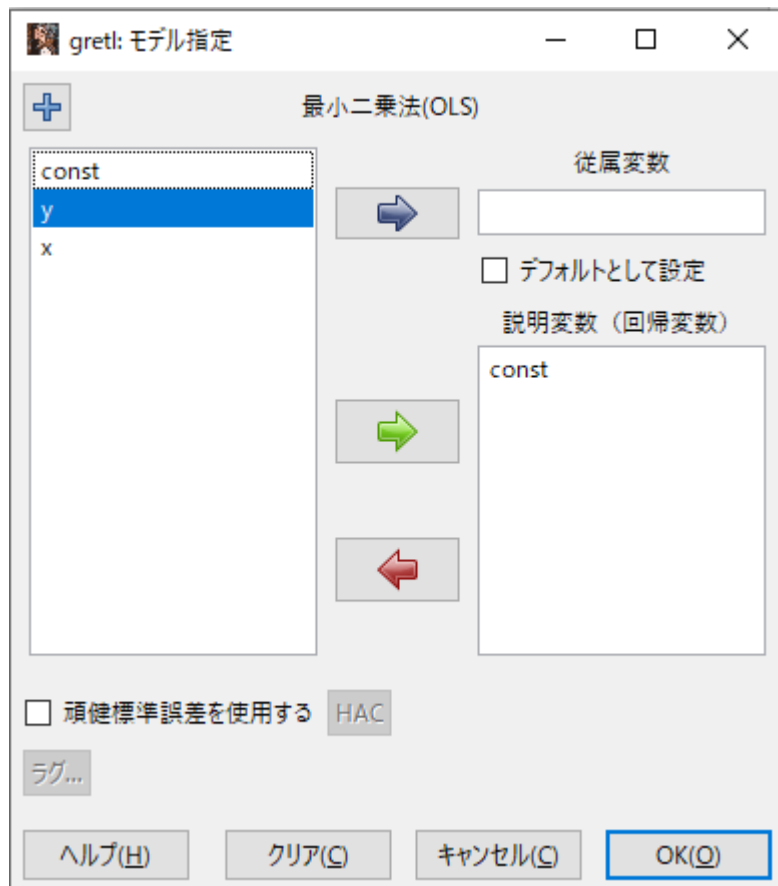
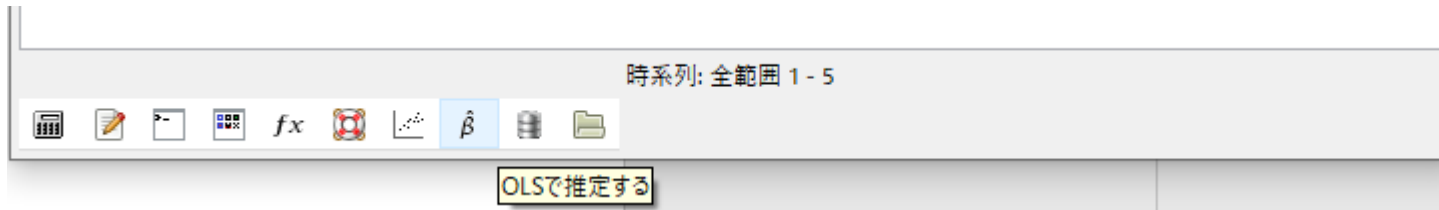




x の列に, 5, 1, 3, 2, 4 を入力後,
左上の「✓」を選択して, データ入力を終える。

下記のように変数名リストが出てくる。

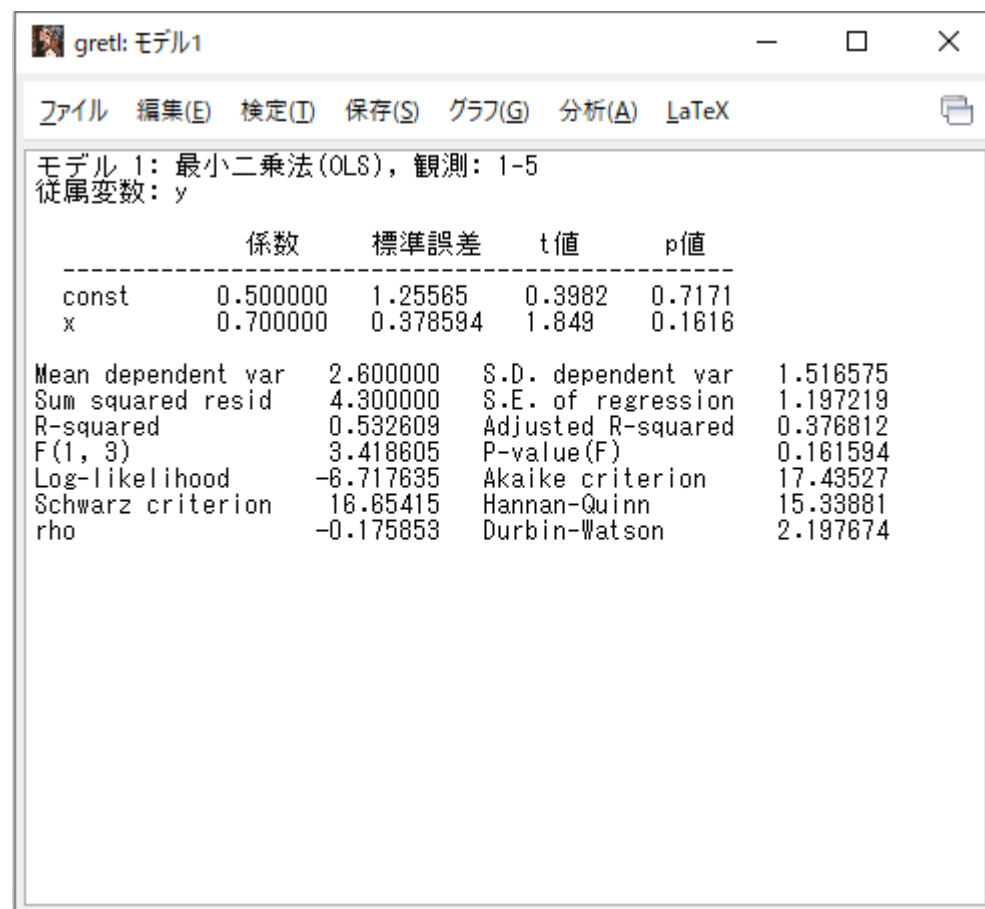


- 推定方法 その1 : 同じ画面の下の方に下記の画面があり, 右から3番目の「 $\hat{\beta}$ 」(「OLSで推定する」)を選択する。

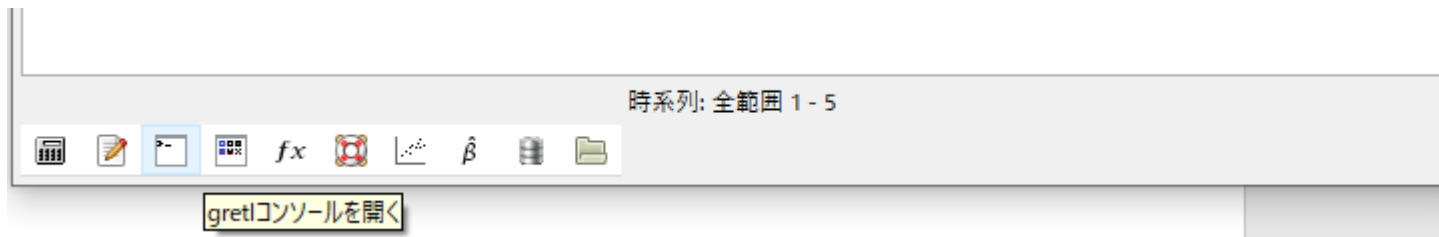


y を選択して「」を選択して従属変数に,
次に, x を選択して「」を選択して説明変数にする。

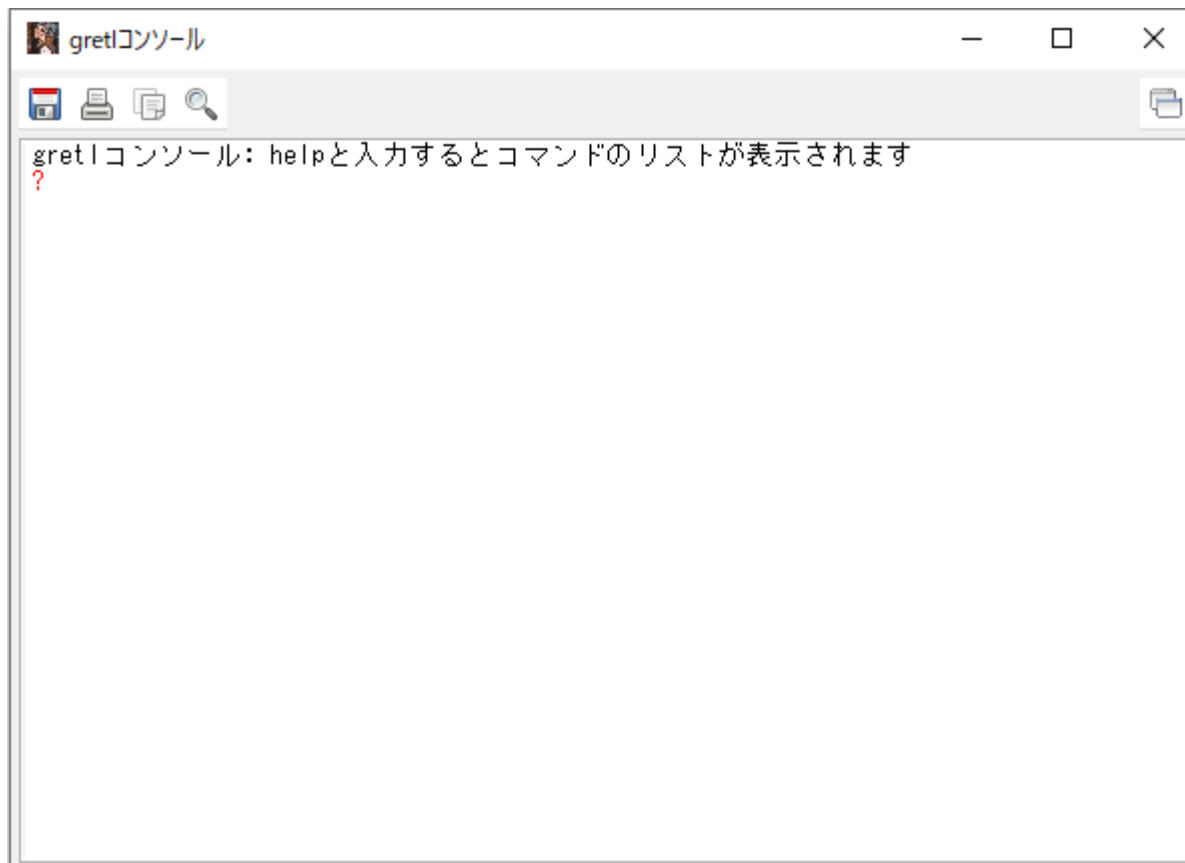
下記の画面となる。「OK」を選択すると、推定結果が右のように出力される。



● 推定方法 その2 : 左から3番目の「」(「gretl コンソールを開く」) を選択する。



下記の画面が出る。



? の後に `ols y const x` と打って, Enter キーを押すと, 次ページの結果が出力される。

```
gretlコンソール: helpと入力するとコマンドのリストが表示されます
? ols y const x

モデル 2: 最小二乗法(OLS), 観測: 1-5
従属変数: y

-----
      係数      標準誤差      t値      p値
-----
const  0.500000  1.25565  0.3982  0.7171
x      0.700000  0.378594  1.849  0.1616

Mean dependent var  2.600000  S.D. dependent var  1.516575
Sum squared resid  4.300000  S.E. of regression  1.197219
R-squared           0.532609  Adjusted R-squared  0.376812
F(1, 3)            3.418605  P-value(F)         0.161594
Log-likelihood      -6.717635  Akaike criterion   17.43527
Schwarz criterion   16.65415  Hannan-Quinn      15.33881
rho                 -0.175853  Durbin-Watson     2.197674

?
```

ols と const は自動的に赤色で表示される。赤字はコマンド, 予約語などである。

ols = ordinary least squares (最小二乗法)

const = constant term (定数項)

ols y const x は $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ を最小二乗法で推定するという意味 (被説明変数, 説明変数と並べて書く)。