例 4： 回帰モデル

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i$$

$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \qquad i = 2, 3, \cdots, n$$

について，$H_0:\ \rho = 0$**，**$H_1:\ \rho \neq 0$ **の尤度比検定を行う。**

$\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, \rho)$ **とする。対数尤度関数は，**

$$\begin{aligned}\log l(\theta) &= \sum_{i=2}^{n} \log f(Y_i; \theta) \\ &= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i - \rho Y_{i-1}) - \alpha(1-\rho) - \beta(X_i - \rho X_{i-1})\Big)^2\end{aligned}$$

となる。

対数尤度関数をそれぞれ α，β，σ^2，ρ について微分し，ゼロとおく。4 本の連立方程式を解いて，制約なし最尤推定量 $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{\sigma}^2$，$\hat{\rho})$ が得られる。

$\rho = 0$ と制約をおく。$\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, 0)$ とする。対数尤度関数は，

$$
\begin{aligned}
\log l(\theta) &= \sum_{i=2}^{n} \log f(Y_i; \theta) \\
&= -\frac{n-1}{2} \log(2\pi) - \frac{n-1}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2
\end{aligned}
$$

となる。

上記の対数尤度関数をそれぞれ α，β，σ^2 について微分し，ゼロとおく。3 本の連立方程式を解いて，$\rho = 0$ の制約付き最尤推定量 $\widetilde{\theta} = (\widetilde{\alpha}$，$\widetilde{\beta}$，$\widetilde{\sigma}^2$，$0)$ が得られる。

すなわち，

$$\frac{\max_{\alpha,\beta,\sigma^2} l(\alpha,\beta,\sigma^2,0)}{\max_{\alpha,\beta,\sigma^2,\rho} l(\alpha,\beta,\sigma^2,\rho)} = \frac{l(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\sigma}^2,0)}{l(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\sigma}^2,\hat{\rho})} = \frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\hat{\theta})}$$

$\log l(\hat{\theta})$ は，$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i - \hat{\rho}Y_{i-1}) - \hat{\alpha}(1-\hat{\rho}) - \hat{\beta}(X_i - \hat{\rho}X_{i-1})\Big)^2$ に注意して，

$$\begin{aligned}\log l(\hat{\theta}) &= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\hat{\sigma}^2) - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=2}^{n}\Big((Y_i - \hat{\rho}Y_{i-1}) - \hat{\alpha}(1-\hat{\rho}) - \hat{\beta}(X_i - \hat{\rho}X_{i-1})\Big)^2 \\ &= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\hat{\sigma}^2) - \frac{n-1}{2}\end{aligned}$$

となる。

同様に，$\log l(\widetilde{\theta})$ は，$\widetilde{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=2}^{n}(Y_i - \widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta}X_i)^2$ に注意して，

$$\begin{aligned}\log l(\widetilde{\theta}) &= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\widetilde{\sigma}^2) - \frac{1}{2\widetilde{\sigma}^2}\sum_{i=2}^{n}(Y_i - \widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta}X_i)^2 \\ &= -\frac{n-1}{2}\log(2\pi) - \frac{n-1}{2}\log(\widetilde{\sigma}^2) - \frac{n-1}{2}\end{aligned}$$

となる。

したがって，尤度比検定統計量

$$-2\log\frac{l(\widetilde{\theta})}{l(\hat{\theta})} = (n-1)\log\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}$$

は，n が大きくなると，$\chi^2(1)$ 分布に近づく。

10.4　各種検定方法：まとめ

回帰式

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i \qquad u_i \sim N(0, \sigma^2) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

ただし，u_1，u_2，$\cdots$，u_n は互いに独立とする。

1. **個々の $H_0:\ \beta_j = 0$ の検定** $\Longrightarrow \dfrac{\hat{\beta}_j}{s_{\beta_j}} \sim t(n-k)$

   ただし，$\hat{\beta}_j$ は β_j の最小二乗推定量，s_{β_j} は $\hat{\beta}_j$ の標準誤差の推定量

2. **β_1，β_2，$\cdots$，β_k に関する G 個の制約の検定** $\Longrightarrow \dfrac{(\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2)/G}{\sum \hat{u}_i^2/(n-k)} \sim F(G, n-k)$

   ただし，$\sum \widetilde{u}_i^2$ は制約付き残差平方和，$\sum \hat{u}_i^2$ は制約なし残差平方和

3. β_1，β_2，$\cdots$，β_k **に関する** G **個の制約の検定** $\Longrightarrow$ $\dfrac{(\hat{R}^2 - \widetilde{R}^2)/G}{(1-\hat{R}^2)/(n-k)} \sim F(G, n-k)$

ただし，$\widetilde{R}^2$ **は制約付き決定係数，**$\hat{R}^2$ **は制約なし決定係数**

4. 個々の $H_0:\ \theta_j = 0$ **の検定** $\Longrightarrow$ **最尤推定量の性質から，**n **が大きいとき，**$\hat{\theta}_j \sim N(\theta, \hat{\sigma}_j^2)$**，**

すなわち，H_0 **のもとで** $\dfrac{\hat{\theta}_j}{\hat{\sigma}_j} \longrightarrow N(0,1)$

ただし，$\hat{\theta}_j$ **は** θ_j **の最尤推定量，**$\hat{\sigma}_j^2$ **は** $\sigma_j^2 = \mathrm{V}(\hat{\theta}_j)$ **の最尤推定量**

5. β_1，β_2，$\cdots$，β_k **に関する** G **個の制約の検定** $\Longrightarrow$ $-2\Big(\log l(\widetilde{\theta}) - \log l(\hat{\theta})\Big) \longrightarrow \chi^2(G)$

ただし，$\widetilde{\theta} = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \cdots, \widetilde{\beta}_k)$ **は制約付き最尤推定量，**$\hat{\theta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k)$ **は制約なし最尤推定量**

4，5 について，n **が大きいときのみ利用可能**

回帰係数だけでなく，他の検定にも利用可能（例えば，系列相関の検定）

10.5 各種検定方法の例（12月24日の授業で使ったデータ）

Excel ファイル「demand.xlsx」

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	year	y	fy	my	vy	fg	mg	vg	cpi
2	2000	562754	60786	63949	64223	40594	44632	180804	99.1
3	2001	552734	57808	59883	62974	39517	43125	175269	98.4
4	2002	539924	57962	61292	62646	40648	43867	176826	97.5
5	2003	524810	53081	59349	61720	38439	42823	167833	97.2
6	2004	531690	50594	60393	62151	37286	42917	166791	97.2
7	2005	524585	48795	61338	60204	36031	44045	169838	96.9
8	2006	525719	47919	60746	59865	34190	43826	164408	97.2
9	2007	528762	46702	61867	59804	33357	44989	167490	97.2
10	2008	534235	44575	65436	60411	31790	45822	170521	98.6
11	2009	518226	42126	63606	59153	30992	47488	171857	97.2
12	2010	520692	39921	61573	61100	28923	48019	160603	96.5
13	2011	510149	36810	61537	58988	26349	47943	161788	96.3
14	2012	518506	36769	60401	59248	25886	49111	161116	96.2
15	2013	523589	37079	64423	60776	25283	51603	163037	96.6
16	2014	519761	36641	69056	61644	23552	50481	162979	99.2
17	2015	525669	37798	73466	65735	23157	51221	161465	100
18	2016	526973	36327	73346	65821	22165	53788	153780	99.9
19	2017	533820	34589	75033	64941	20188	54021	157433	100.4
20	2018	558718	33639	75762	65744	19239	55084	151752	101.3
21	2019	586149	33956	73978	61510	18810	54721	151248	101.8

year　＝　年

y　＝　実収入【円】（家計調査 家計収支編 二人以上の世帯・二人以上の世帯のうち勤労者世帯・全国）

fy　＝　生鮮魚介【円】（家計調査 家計収支編 二人以上の世帯・二人以上の世帯のうち勤労者世帯・全国）

my　＝　生鮮肉【円】（家計調査 家計収支編 二人以上の世帯・二人以上の世帯のうち勤労者世帯・全国）

vy　＝　生鮮野菜【円】（家計調査 家計収支編 二人以上の世帯・二人以上の世帯のうち勤労者世帯・全国）

fg　＝　生鮮魚介【1g】（家計調査 家計収支編 二人以上の世帯・二人以上の世帯のうち勤労者世帯・全国）

mg　＝　生鮮肉【1g】（家計調査 家計収支編 二人以上の世帯・二人以上の世帯のうち勤労者世帯・全国）

vg　＝　生鮮野菜【1g】（家計調査 家計収支編 二人以上の世帯・二人以上の世帯のうち勤労者世帯・全国）

cpi ＝　消費者物価指数・総合

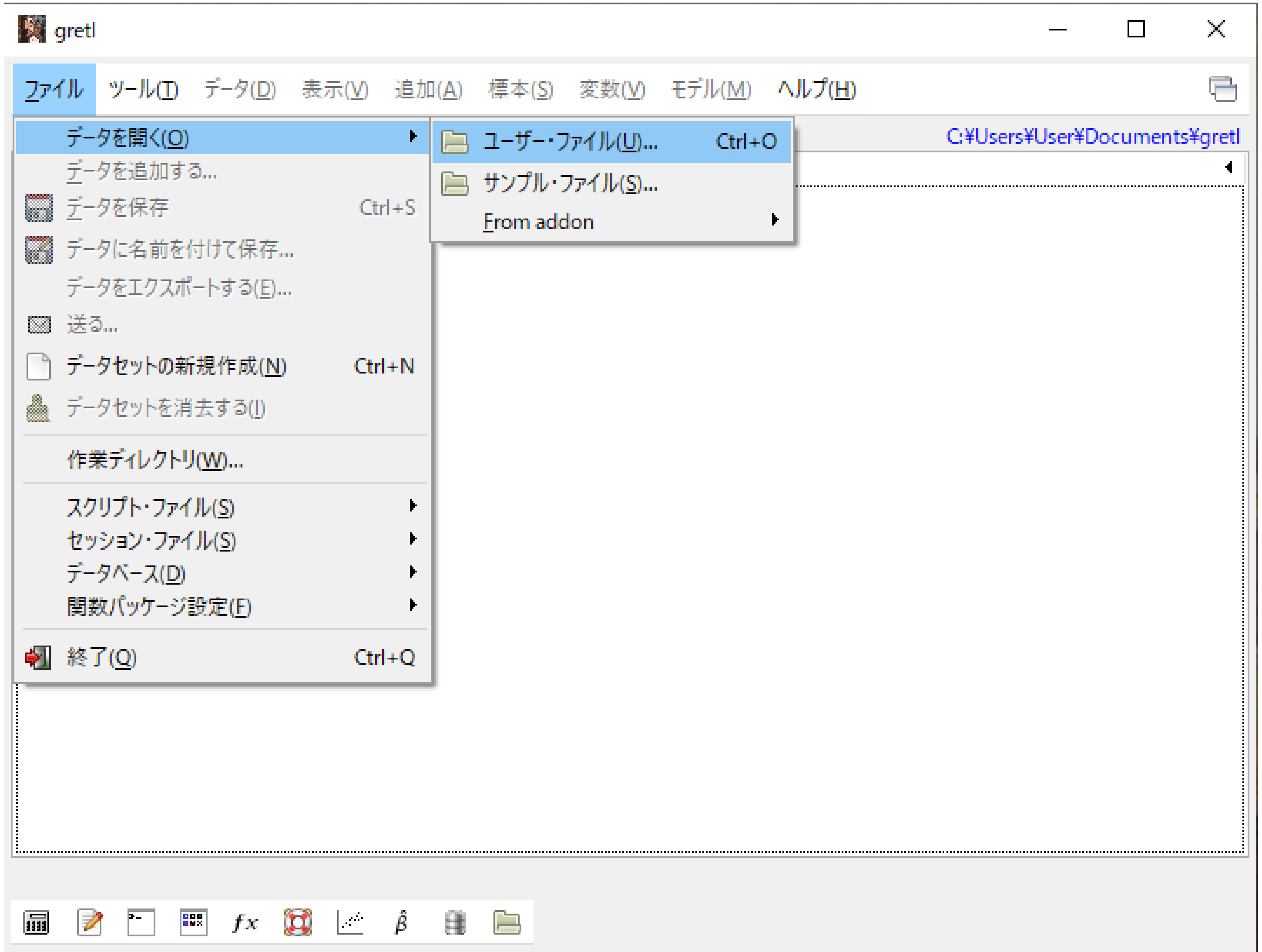
---

y　一か月の実収入（年収÷12 か月）

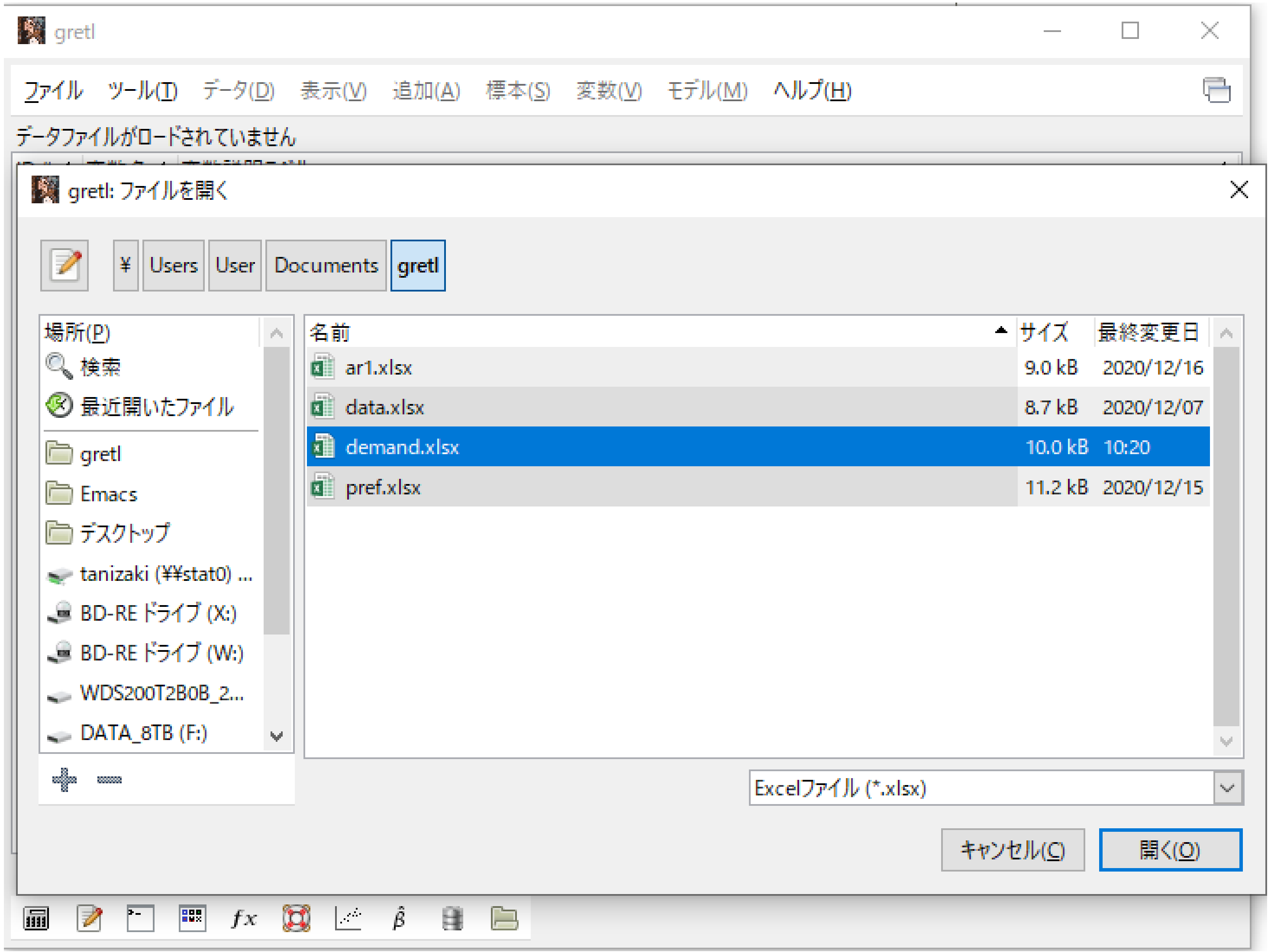
fy, my, vy　年間支出金額（円）

fg, mg, vg　年間購入量（g）

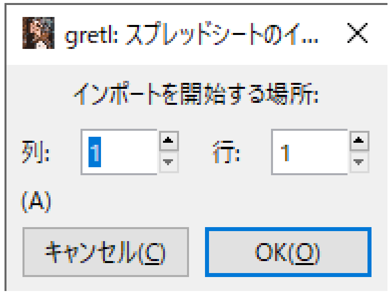
cpi　2015 年＝100



「ファイル」，「データを開く(O)」，「ユーザー・ファイル(U)」の順に選択

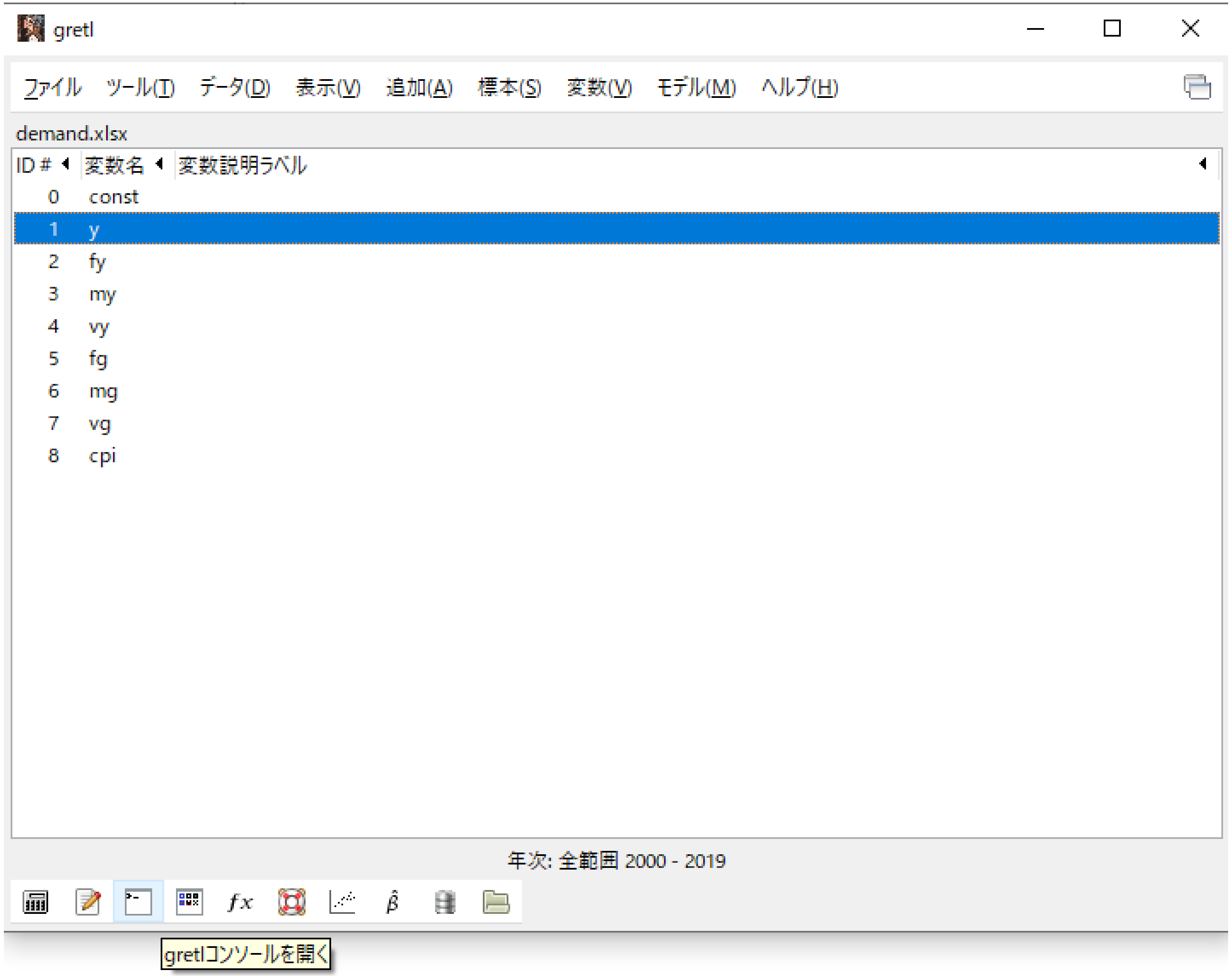


右下の「Excel ファイル(*.xlsx)」にして，「demand.xlsx」を選び，「開く(O)」を選択



「OK(O)」を選択すると，

右画面になる。

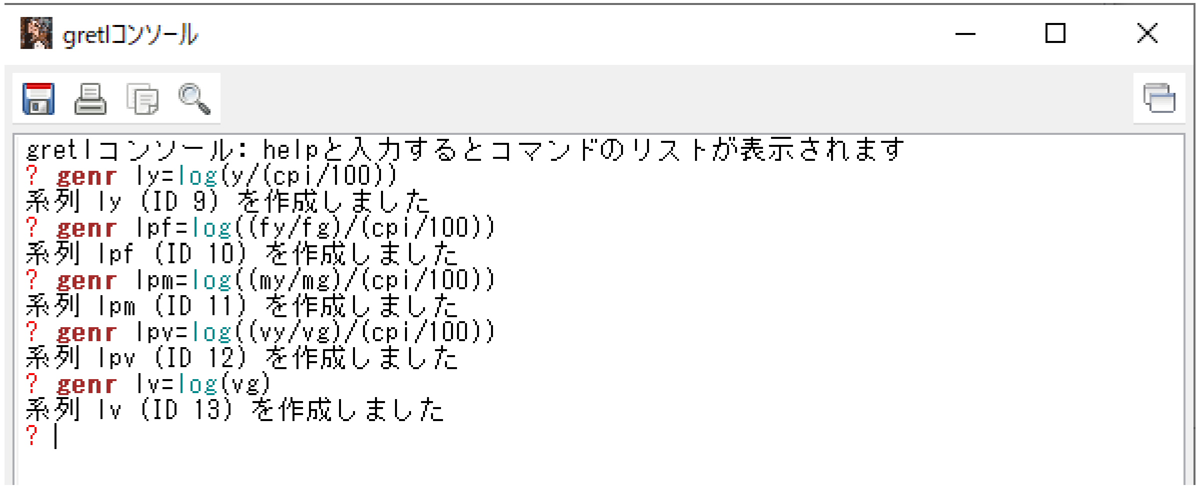


下の左から 3 番目のアイコン

「gretl コンソールを開く」

を選択

データの変換



? genr ly=log(y/(cpi/100)) ← 実収入 y を実質データに変換後，対数変換

? genr lpf=log((fy/fg)/(cpi/100)) ← 1g 当たりの生鮮魚介の価格 fy/fg を実質化，対数変換

? genr lpm=log((my/mg)/(cpi/100)) ← 1g 当たりの生鮮肉の価格 my/mg を実質化，対数変換

? genr lpv=log((vy/vg)/(cpi/100)) ← 1g 当たりの生鮮野菜の価格 vy/vg を実質化，対数変換

? genr lv=log(vg) ← 生鮮野菜の購入量（需要量）vg の対数変換