

練習問題

締め切り： 2020年11月11日, PM23:59:59

- 答案には、必ず、氏名と学籍番号を書いて下さい（印刷したときに誰の答案かが分かるように）。
- 答案は TA の大学院生・陳君（skyanagi2319@gmail.com）宛にメールにファイル添付して送ってください。手書きで解答を作り、写真に撮って画像を送っても構いません。ただし、字が読めるような画質にして下さい。
- 厳格にするつもりはありませんが、ファイル・サイズは出来るだけ 1MB（1メガ・バイト）以内にして下さい。（参考）IrfanView (<https://www.irfanview.com/>) のソフトを使うと、小さいサイズの JPEG ファイルにすることができます。
- Subject に「計量」として下さい。でなければ、ごみ箱に行く可能性があります（Subject でメールを振り分けています）。

1 次の回帰モデルを考える。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ただし、 u_1, u_2, \dots, u_n は互いに独立で、 $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ を仮定する。

α, β の最小二乗推定量を $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ とする。

β の別の推定量 $\tilde{\beta} = \sum_{i=1}^n (\omega_i + d_i) Y_i$ を考える。ただし、 $\omega_i = \frac{X_i - \bar{X}}{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ とする。

σ^2 の推定量 $s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2$ を考える。

このとき、下記の問いに答えなさい。

- (1) $E(\hat{\alpha}), E(\hat{\beta})$ を求めなさい。
- (2) $V(\hat{\alpha}), V(\hat{\beta})$ を求めなさい。
- (3) $\tilde{\beta}$ が線形不偏推定量であるための条件を求めなさい。
- (4) $\tilde{\beta}$ が線形不偏推定量であるとき、 $V(\tilde{\beta})$ を求めなさい。
- (5) $\hat{\beta}$ と $\tilde{\beta}$ のうち、どちらが良い推定量と言えるか説明しなさい。
- (6) $E(s^2), V(s^2)$ を求めなさい。
- (7) s^2 は σ^2 の一致推定量であることを証明しなさい。