

練習問題

締め切り：2021年1月20日, PM23:59:59

- 答案には、必ず、氏名と学籍番号を書いて下さい（印刷したときに誰の答案かが分かるように）。
- 答案は TA の大学院生・陳君（skyanagi2319@gmail.com）宛にメールにファイル添付して送ってください。手書きで解答を作り、写真に撮って画像を送っても構いません。ただし、字が読めるような画質にしてください。
- 厳格にするつもりはありませんが、ファイル・サイズは出来るだけ 1MB（1メガ・バイト）以内にして下さい。（参考）IrfanView (<https://www.irfanview.com/>) のソフトを使うと、小さいサイズの JPEG ファイルにすることができます。
- Subject に「計量」として下さい。でなければ、ごみ箱に行く可能性があります（Subject でメールを振り分けています）。

1 回帰式：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

について、最小二乗法を用いて α, β の推定量 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を求める。 u_1, u_2, \dots, u_n は互いに独立で、すべての i について $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ が通常の仮定である。。

- (1) 「 u_1, u_2, \dots, u_n は互いに独立」という仮定が成り立たない場合、 β の最小二乗法の推定量 $\hat{\beta}$ は不偏推定量であることを証明しなさい。
- (2) 「すべての i について $V(u_i) = \sigma^2$ 」という仮定が成り立たない場合（すなわち、 $V(u_i) = \sigma_i^2$ ）、 $\hat{\beta}$ の分散を求めなさい。
- (3) $V(u_i) = \sigma_i^2$ のとき、 β の最も良い推定量を求めなさい。その理由も併せて答えなさい。
- (4) 「すべての i について u_i が同じ正規分布に従う」という仮定が崩れた場合、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ の分布を導出しなさい。
- (5) さらに、「 X_i は非確率変数である」という仮定を緩めて、「 X_i は確率変数であるが、 X_i と u_i は独立である」という仮定の下では、最小二乗法の推定量 $\hat{\beta}$ は不偏推定量と言えることを証明しなさい。
- (6) 「 X_i は確率変数であり、 X_i と u_i は相関がある」という仮定の下では、最小二乗法の推定量 $\hat{\beta}$ は一致推定量と言えないことを証明しなさい。

(*) 必要なら、変数を各自定義してよい。