

# 練習問題

締め切り：2021年1月20日, PM23:59:59

- 答案には、必ず、氏名と学籍番号を書いて下さい（印刷したときに誰の答案かが分かるように）。
- 答案は TA の大学院生・陳君（skyanagi2319@gmail.com）宛にメールにファイル添付して送ってください。手書きで解答を作り、写真に撮って画像を送っても構いません。ただし、字が読めるような画質にしてください。
- 厳格にするつもりはありませんが、ファイル・サイズは出来るだけ 1MB（1メガ・バイト）以内にして下さい。（参考）IrfanView (<https://www.irfanview.com/>) のソフトを使うと、小さいサイズの JPEG ファイルにすることができます。
- Subject に「計量」として下さい。でなければ、ごみ箱に行く可能性があります（Subject でメールを振り分けています）。

1 回帰式：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

について、最小二乗法を用いて  $\alpha, \beta$  の推定量  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  を求める。 $u_1, u_2, \dots, u_n$  は互いに独立で、すべての  $i$  について  $u_i \sim N(0, \sigma^2)$  が通常の仮定である。。

- (1) 「 $u_1, u_2, \dots, u_n$  は互いに独立」という仮定が成り立たない場合、 $\beta$  の最小二乗法の推定量  $\hat{\beta}$  は不偏推定量であることを証明しなさい。
- (2) 「すべての  $i$  について  $V(u_i) = \sigma^2$ 」という仮定が成り立たない場合（すなわち、 $V(u_i) = \sigma_i^2$ ）、 $\hat{\beta}$  の分散を求めなさい。
- (3)  $V(u_i) = \sigma_i^2$  のとき、 $\beta$  の最も良い推定量を求めなさい。その理由も併せて答えなさい。
- (4) 「すべての  $i$  について  $u_i$  が同じ正規分布に従う」という仮定が崩れた場合、 $n \rightarrow \infty$  のとき、 $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$  の分布を導出しなさい。
- (5) さらに、「 $X_i$  は非確率変数である」という仮定を緩めて、「 $X_i$  は確率変数であるが、 $X_i$  と  $u_i$  は独立である」という仮定の下では、最小二乗法の推定量  $\hat{\beta}$  は不偏推定量と言えることを証明しなさい。
- (6) 「 $X_i$  は確率変数であり、 $X_i$  と  $u_i$  は相関がある」という仮定の下では、最小二乗法の推定量  $\hat{\beta}$  は一致推定量と言えないことを証明しなさい。

(\*) 必要なら、変数を各自定義してよい。