カルマン・フィルター・モデルの理論と経済学への応用

谷﨑　久志
神戸大学・経済学部

『状態空間モデルの経済学への応用』(谷﨑著，日本評論社，1993) からの抜粋

1　状態空間モデルの紹介

フィルタリング (filtering) 理論は，Kalman (1960), Kalman and Bucy (1961) を 初めとして，1960 年代に工学の分野で発展してきた。経済学に応用されはじめたのは，1970 年代に入ってからである。可変パラメータ・モデル，自己回帰移動平均モデル，季節調整モデル，経済変数の予測問題，恒常消費または所得の推定等，観測されない変数を推定するのに，状態空間モデルは有効である。本稿では，状態空間モデルの紹介を目的とし，その経済学への応用例・導出方法等を中心として，簡単にサーベイを行う[1]。

1.1　状態空間モデルの定義

状態空間モデル (state-space model) は，次のように，観測方程式 (measurement equation) と遷移方程式 (transition equation) の 2 つの式によって表される。状態空間モデルの標準的なテキストとしては，Jazwinski (1970), Gelb (1974), Anderson and Moore (1979), 片山 (1983), Harvey (1989) 等が適当である。

$$\text{(観測方程式)} \qquad y_t = Z_t\alpha_t + d_t + S_t\epsilon_t \tag{1}$$

$$\text{(遷移方程式)} \qquad \alpha_t = T_t\alpha_{t-1} + c_t + R_t\eta_t \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} H_t & 0 \\ 0 & Q_t \end{pmatrix} \right), \qquad t = 1, \cdots, T \tag{3}$$

$$\alpha_0 \sim N(a_0, \Sigma_0)$$

$$\begin{aligned} &y_t : g\times 1, \quad Z_t : g\times k, \quad d_t : g\times 1, \quad S_t : g\times g, \quad \epsilon_t : g\times 1, \\ &\alpha_t : k\times 1, \quad T_t : k\times k, \quad c_t : k\times 1, \quad R_t : k\times k, \quad \eta_t : k\times 1, \end{aligned}$$

$y_t, Z_t, d_t, S_t, T_t, c_t, R_t$ は観測可能な変数， ϵ_t, η_t は撹乱項とする。T は標本数を表す。α_t は状態変数と呼ばれ，推定されるべき変数である。(1) 式は観測方程式と呼ばれ， (2) 式は遷移方程式と呼ばれる。このように，このモデルでは，観測される変数を用いて，観測されない変数を推定しようというものである。以下の 2 つの仮定を必要とする。

(i)　初期値 α_0 は平均 a_0, 分散 Σ_0 の確率ベクトルとする。すなわち， $\mathrm{E}(\alpha_0) = a_0$, $\mathrm{Var}(\alpha_0) = \Sigma_0$ である。

(ii)　撹乱項 ϵ_t, η_s はすべての t, s について，互いに独立であり，初期値ベクトル α_0 とも無相関である (すなわち，すべての t, s について $\mathrm{E}(\epsilon_t\eta_s') = 0$，すべての t について $\mathrm{E}(\epsilon_t\alpha_0') = 0$, $\mathrm{E}(\eta_t\alpha_0') = 0$ が成り立つ)。

[1]本稿は，Tanizaki (1991a, 1992, 1993c) に基づいて，加筆・修正したものである。
フィルタリングに関する邦語文献としては，有本 (1977), 砂原 (1981, 1982a, 1982b), 片山 (1983), 加藤 (1987) 等があるが，これらのものはすべて理工系のものである。経済学に関連したものは，青木 (1984), 翁 (1985), 刈谷 (1985), 日銀統計局 (1985), 小川 (1988) があるがまだまだその数は少ない。

注意すべき点は以下の通りでる。

1) 仮定 (ii) は，ϵ_t と α_t の間の無相関，η_t と α_{t-1} との無相関を保証する。すなわち，$\mathrm{E}(\epsilon_t \alpha_t') = 0, \mathrm{E}(\eta_t \alpha_{t-1}') = 0$。

2) $Z_t, d_t, S_t, T_t, c_t, R_t$ は未知パラメータ (例えば，θ) に依存してもよい。この場合には，未知パラメータ θ は状態変数 α_t と共に推定されなければならない。α_t の推定問題については 1.3 節に述べられ，θ については 1.5 節で触れる。

3) 初期値 α_0 と撹乱項 ϵ_t, η_t には正規分布を仮定するのが一般的ではあるが，アルゴリズムの導出方法によっては，この仮定を必要としない。例えば，混合推定によるフィルタリング・アルゴリズムの導出は誤差項 ϵ_t, η_t に分布を仮定する必要はない。しかし，分布関数に基づいたアルゴリズムの導出には，正規性の仮定を必要とする (詳しくは，後述の 1.3 節を見よ)。

4) 観測方程式に含まれる撹乱項 ϵ_t と遷移方程式の撹乱項 η_t は互いに無相関 (この仮定は (3) に相当する) として，本稿では，以下の議論を進める。しかし，この仮定を緩めることも可能である。その場合の議論については，例えば，片山 (1983) や Harvey (1989) 等に述べられている。

1.2 状態空間モデルの経済学への応用例

状態空間モデルの経済面への応用例として，可変パラメータ・モデル，自己回帰移動平均過程，季節調整，確報値の推定，恒常所得の推定等が考えられ，観測されない変数の推定に状態空間モデルは応用される。

1.2.1 可変パラメータ・モデル

計量モデルの基本である最小自乗法 (OLS) の大前提として挙げられるものに,「パラメータは推定期間を通して一定である」というものがある。この根拠は,「十分に長い期間をとれば，確かに経済構造は徐々に変化しているが，その一部分のごく短期的な期間をとれば，十分に線形近似できる」というところにある。通常の回帰モデルは次のように表される。

$$y_t = x_t \beta + \epsilon_t$$

ここで，y_t は被説明変数，x_t は $1 \times k$ の説明変数ベクトル，β は推定されるべき $k \times 1$ の未知パラメータ，ϵ_t は撹乱項である。

この回帰式の推定方法としては，最小自乗法 (ordinary least squares, OLS), 一般化最小自乗法 (generalized least squares, GLS), 操作変数法 (instrumental variable method, IV) 等がある。いずれの推定方法にしても，推定されたパラメータは推定期間を通して固定的である。このようなモデルは固定パラメータ・モデル (fixed parameter model) として知られている。

しかし，実際には近年特に，様々な外生的なショック (為替の変動相場制への移行，第一次・第二次石油ショック，貿易摩擦による輸出規制，円高の進行等)，または他の政策的な要因[2] 等により経済構造は徐々に変化していると考えるのがより適当である。このように徐々に経済構造が変化している状況において，従来の OLS 等の固定パラメータ・モデルによる推定では，この経済構造の変化を表すことは出来ない。また，パラメータが可変的であり得る理由としては，特定化に誤りのあるモデルを OLS 等で推定した場合，真のモデルは非線形であるにもかかわらず間違って線形で推定した場合，代理変数 (proxy variable) が含まれる場合等もある (Sarris (1973))。誤って，OLS で推定した場合，パラメータの推定値は推定期間内における平均的な構造を表しているに過ぎない。よって，パラメータの変動を明示的に取り入れたモデルを考える必要がある。これは可変パラメータ・モデル (time-varying parameter model) と呼ばれる。可変パラメータを扱ったモデルにはいくつかの種類 (可変パラメータ・モデルについて，補論 1 参照) が考えてられいるが，パラメータの変動をランダムな確率的なものとする状態空間モデルを応用することを考える。

$$(\text{観測方程式}) \qquad y_t = x_t \beta_t + \epsilon_t \tag{4}$$

[2] これは Lucas (1976) の批判に対応している。これについて，刈谷 (1985) からの引用を以下にあげておく。

> さらに最近の経済理論において重要視されている人々の期待 (expectations) を明示的に考慮してモデルを構築する場合，特に中長期のレンジで考えるならば，固定パラメータモデルでは表現し難い点がいくつかある。たとえば，民間部門がさまざまな情報を用いて政策当局の行動に対応して自らの行動を決定すると仮定すると，その反応関数 (reaction function) は民間の学習過程により時を追って変化すると考えることができる。その場合，民間部門の行動を表すパラメータは，固定的なものとは考え難い。特に経済主体の期待形成が合理的 (rational) であるモデルについては可変パラメータモデルを用いなければ表せないともいわれている。

このように，民間部門が政策当局の行動に反応して行動するならば，政策当局が行動を起こす度毎に経済構造を表すパラメータは変動するといわれている。

$$(\text{遷移方程式}) \qquad \beta_t = \Psi_t \beta_{t-1} + \eta_t \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \right), \qquad t = 1, \cdots, T \tag{6}$$

(5) 式によれば，パラメータの動きは AR(1) モデルと仮定されている (この動きは AR (p) モデルに簡単に拡張され得る)。仮定 (6) によれば， η_t は ϵ_t と独立で，平均ゼロ, 分散 R の分布である。可変パラメータ β_t は観測できない変数であり，観測される変数 y_t と x_t を使って推定される。(1) 式と (2) 式との対応では， $Z_t = x_t$, $d_t = 0$, $S_t = I_k$, $T_t = \Psi$, $c_t = 0$, $R_t = I_k$ となっている (ただし， I_k は $k \times k$ の単位行列を表す)。

可変パラメータ・モデルを扱ったものには，Cooper (1973), Belsley and Kuh (1973), Sarris (1973), Cooley and Prescott (1973, 1976), Laumas and Mehra (1976), Garbade (1977), Cooley (1977), Sant (1977), Pagan (1980), 日銀統計局 (1985), 谷崎 (1987a), Dziechciarz (1989), Tanizaki (1989, 1993a, 1993b) 等数々ある。

このモデルは，徐々に経済構造が変化していく場合のみをとらえていて，急激な経済構造の変化を表すことはできないという欠点を持つ。本稿ではこの可変パラメータ・モデルを扱う。簡単化のため $\Psi = I_k$ (パラメータの動きはランダム・ウォークを意味する) として，次節では，日米の消費関数を推定して，両国の経済構造の変化を調べる。

1.2.2 自己回帰移動平均過程

任意の自己回帰移動平均過程 (autoregressive-moving average process, ARMA process) は状態空間モデルによって，書き換えられることが知られている (青木 (1984), Aoki (1987), Burridge and Wallis (1988), Gardner, Harvey and Phillips (1980), Harvey (1981, 1989) 等数多くの文献がある)。例えば，次の ARMA (p, q) モデルを考えよう。

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \cdots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + b_q \epsilon_{t-q}$$

撹乱項 ϵ_t はすべての t についてホワイト・ノイズ (white noise) であるとする。この ARMA(p, q) モデルは次のように書き換えられる。

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \cdots + a_m y_{t-m} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + b_{m-1} \epsilon_{t-m+1}$$

そこでは， $m = max(p, q+1)$ であり， $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_{m-1}$ の中でいくつかはゼロであり得る。さらに，上に示された ARMA $(m, m-1)$ モデルは，次のように表される。

$$(\text{観測方程式}) \qquad y_t = z \alpha_t$$

$$(\text{遷移方程式}) \qquad \alpha_t = A \alpha_{t-1} + B \epsilon_t$$

行列 z, A, B はそれぞれ，以下の通りである。

$$\underset{1 \times m}{z = (1, 0, \cdots, 0)}, \qquad \underset{m \times m}{A = \left(\begin{array}{c|c} a_1 & \\ \vdots & I_{m-1} \\ a_{m-1} & \\ \hline a_m & 0 \end{array} \right)}, \qquad \underset{m \times 1}{B = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{pmatrix}}$$

カルマン・フィルタ・モデルをこのような ARMA モデルの推定に用いた場合，目的はパラメータ $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_{m-1}$ の推定にある。よって通常の ARMA モデルと同じく，識別性の問題が生じる。そして，上の行列 A によって識別の条件は表される (Pagan (1980), Chow (1983), Watanabe (1985), Hannan and Deistler (1988))。

このモデルの拡張として，Kirchen (1988) は定数項を含んだ ARMA (p, q) モデルを考え，予測にはより有効であることを示した。すなわち，モデルは

$$(\text{観測方程式}) \qquad y_t = z \alpha_t$$

$$(\text{遷移方程式}) \qquad \alpha_t - \bar{\alpha} = C \beta_t$$

$$\beta_t = D \beta_{t-1} + E \eta_t$$

で表される。ここで，C は $CC'=I$ という特徴を持った 0 と 1 から成る行列とした。遷移方程式をまとめて，

$$\text{(遷移方程式)} \qquad \alpha_t - \bar{\alpha} = CDC'(\alpha_t - \bar{\alpha}) + CE\eta_t$$

が得られる。上にあげた通常の ARMA (p,q) モデルとの関連は，$A=CDC'$, $B=CE$ であり，また，α_t が $\alpha_t - \bar{\alpha}$ によって置き換えられている。

1.2.3　季節要素モデル

次に，Pagan (1975), Chow (1983) に沿って，季節要素モデル (seasonal component model) を考える。時系列データは通常，循環的要素 (cyclical component)，季節的要素 (seasonal component)，撹乱的要素 (irregular component) から成る。それぞれの要素は観測されない変数である。状態空間モデルを適用することによって，それらの要素を別々に推定することができる。原系列データは次のように書き表される。

$$y_t = y_t^c + y_t^s + v_t$$

y_t, y_t^c, y_t^s, v_t は，それぞれ原系列データ，循環的要素，季節的要素，撹乱的要素を表す。そして，循環的要素は，一期前の循環的要素と他の外生変数に依存すると仮定され，次のように表される。

$$y_t^c = Ay_{t-1}^c + Cx_t + u_t$$

A, C は係数，x_t は $k \times 1$ の外生変数のベクトル，u_t は撹乱項である。さらに，季節的要素は一年前の同じ期のそれに依存すると考えられるので，以下の式で表される。

$$y_t^s = By_{t-m}^s + w_t$$

B は係数，w_t は撹乱項である。また，m は四半期モデルのとき 4，月次モデルのとき 12 となる。以上，3 つの式をまとめると，次の状態空間モデルが得られる。

$$\text{(観測方程式)} \qquad y_t = z\alpha_t + v_t$$
$$\text{(遷移方程式)} \qquad \alpha_t = M\alpha_{t-1} + Nx_t + \epsilon_t$$

それぞれの記号は以下に示される。

$$\underset{1\times(m+1)}{z = (1,1,0,\cdots,0)}, \qquad \underset{(m+1)\times(m+1)}{M = \left(\begin{array}{c|cc} A & & 0 \\ \hline & 0 & I_{m-1} \\ 0 & B & 0 \end{array}\right)}, \qquad \underset{(m+1)\times k}{N = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}}, \qquad \underset{(m+1)\times 1}{\epsilon_t = \begin{pmatrix} u_t \\ w_1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$(m+1)\times 1$ ベクトル α_t の第 1, 第 2 要素は，それぞれ循環的要素，季節的要素である。このように，状態空間モデルを用いて，季節調整の問題を扱うことが可能である。

1.2.4　速報値に基づいた確報値の予測

通常，経済データを得るとき，まず初めに速報値 (preliminary data) が得られる。次にしばらくしてから，確報値 (final data) または改訂値 (revised data) が公表される[3]。問題は，速報値が利用可能であるときに，いかに確報値 (または改訂値) を推定するのかということである。例えば，国民所得統計のようなデータは最初の数年にわたって毎年改訂され，その後も一定期間 (5 年, 10 年) ごとに改訂される[4]。図 1 は名目国民総支出 (GNP) の改訂の様子を 1970 年から 1991 年までの暦年のデータ使って示している。1981 年版 (昭和 56 年版) から 1993 年版 (平成 5 年版) までの『国民経済計算年報』(経済企画庁) から，毎年名目 GNP のデータを書き出す。例えば，1982 年版の『国民経済計算年報』によると，1980 年までの名目 GNP のデータが公表されており，特に，1980 年のデータは『国民経済計算年報』に初めて現れ，その数字は 234871.7 である。この 1980 年の名目 GNP は，1983 年版では 235834.0，1986 年版で 240098.4，さらに 1991 年版で

図 1. 名目国民総支出 (10 億円) の改訂

年	81 年版	82 年版	83 年版	84 年版	85 年版	86 年版	87 年版	88 年版	89 年版	90 年版	91 年版	92 年版	93 年版
1970	73128.2	—	—	—	—	73188.4	—	—	—	—	—	—	—
1971	80522.3	—	—	—	—	80591.9	—	—	—	—	—	—	—
1972	92312.8	—	—	—	—	92400.8	—	—	—	—	—	—	—
1973	112440.9	—	—	—	—	112519.5	—	—	—	—	—	—	—
1974	133921.7	—	—	—	—	133996.8	—	—	—	—	—	—	—
1975	147873.8	—	—	—	—	148169.9	—	—	—	—	—	—	—
1976	165694.7	—	—	—	—	166416.9	—	—	—	—	—	—	—
1977	184368.2	—	—	—	—	185530.1	—	—	—	—	—	—	—
1978	202708.0	202707.9	—	—	—	204474.5	—	—	—	—	—	—	—
1979	219335.6	218894.1	—	—	—	221824.5	—	—	—	—	—	—	—
1980		234871.7	235834.0	—	—	240098.4	—	—	—	—	240098.5	—	—
1981			251259.2	251999.5	—	256816.8	—	—	—	—	257416.5	—	—
1982				264775.1	264865.7	269697.1	—	—	—	—	270669.3	—	—
1983					275230.1	280567.6	—	—	—	—	282078.2	—	—
1984						298589.4	298452.7	—	—	—	301048.2	—	—
1985							317251.8	317440.9	—	—	321555.9	—	—
1986								331345.5	331253.5	—	335837.8	—	—
1987									345292.3	345476.2	350478.9	—	—
1988										367388.6	373731.1	—	—
1989											398693.3	399046.4	—
1990												428667.5	427469.2
1991													453984.6

注：(1) 空欄はデータがまだ公表されていない (利用可能ではない) ことを表す。
(2) — はデータが改訂されなかったことを意味し，左隣のデータと同じ値である。

240098.5 へとそれぞれ改訂されている。このように，1980 年のデータは過去 3 度改訂されている。このようにデータは最初の 2,3 年間そして一定期間毎に改訂されるため，確報値は観測されない変数とみなされ得る。元来，速報値も確報値も同じデータであるので，速報値と確報値との間にはなんらかの関係が存在する。これを観測方程式として表す。また，ある経済理論から導き出された関係式は，速報値よりむしろ，確報値に基づいたものであると考えるのが適当である。この関係式は遷移方程式となる[5]。このように，状態空間モデルを使って，この確報値の推定問題を考えることができる。Howrey (1978,1984), Conrad and Corrado (1979), Harvey (1989) 等の文献があげられる。

(観測方程式) $\quad y_t^p = \gamma y_t^f + u_t$

(遷移方程式) $\quad y_t^f = \theta_1 y_{t-1}^f + \theta_2 x_t + v_t$

y_t^p, y_t^f は，それぞれ速報値，確報値を表し，u_t と v_t は攪乱項である。x_t は他の外生変数であり，さらに，γ, θ_1, θ_2 は推定されるべき未知パラメータである。速報値 y_t^p, x_t は観測可能な変数であるが，確報値 y_t^f は観測できない変数である。このように，観測されない変数を観測可能な変数を使って推定することができるのである。Tanizaki and Mariano (1992a, 1994), Mariano and Tanizaki (1995) は，効用最大化問題を解くことによって得られる消費関数を遷移方程式として，消費の確報値を推定した。

1.2.5 恒常消費の推定

Hall (1978) の恒常所得仮説 (permanent income hypothesis) によると，消費はランダム・ウォーク (random walk) によって表される。その後，Hall の定式化に基づいて恒常所得仮説が成り立つかどうかの検定が盛んに行われてきた。しかし，多くの実証研究ではこの仮説は棄却されている。そのため，Hall (1978) のモデルを様々な方向で緩める試みがなされてきた。可変利子率 (variable interest rate) の導入，流動性制約 (liquidity constraint) や耐久性 (durability) の導入，変動所得 (transitory income) の存在，オイラー方程式の非線形性 (nonlinearity) 等の方面から議論されている (例えば，Ban (1982), Campbell (1987), Campbell and Deaton (1989), Campbell and Mankiw (1987, 1990), Deaton (1987),

[3] ほとんどの経済データは改訂されるが，改訂が行われないデータとしては，金利，為替レート等のごく一部である。
[4] 詳細な解説については,『国民経済計算年報』(経済企画庁) の参考資料にある用語解説の「速報と確報」を参照せよ。
[5] 「ある経済理論から導き出された関係式」を遷移方程式とするためには，方程式にラグ構造を含む必要がある。状態空間モデルの遷移方程式は，(2) 式に表されるように，観測不可能な変数の AR(1) 過程として表現された。よって，ラグ構造を含むような「ある経済理論から導き出された関係式」とは，動学的最適化問題を解くことによって得られるオイラー方程式が最も適当であろう。

Diebold and Nerlove (1989), Diebold and Rudebusch (1991a), Flavin (1981), Hall (1990), Hall and Mishkin (1982), Hayashi (1985a, 1985b), Mankiw (1981), Mankiw and Shapiro (1985), West (1888), 山本 (1988) 等多くの文献があげられる)。さらに，Tanizaki (1993c) は，Hall の仮定を可変利子率，変動消費，非線形性の 3 つの面から緩め，状態空間モデルを利用して，恒常所得仮説を検定を試みたが棄却された。本節では，Tanizaki (1993c) に基づき状態空間モデルの一例として，議論を簡単にするために，効用関数は 2 次式で表され，利子率は固定的であるとして，恒常消費 (permanent consumption) と変動消費 (transitory consumption) を別々に推定することを考える。

消費は恒常消費と変動消費から成り，定義式によって表される。この関係式は観測方程式としてとらえられ，そこでは，消費は観測可能であるが，恒常消費，変動消費は共に観測不可能な変数として考えられる。代表的家計の効用関数 (2 次式と仮定する) を最大化して，動学的最適化問題を解いて，また割引率を貯蓄の収益率の逆数と仮定すると，恒常消費はランダム・ウォークとなることが示される。すなわち，次の問題を解くことに等しい。

$$\underset{\{c_t^p\}}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{E}_0\Big(\sum_t \beta^t u(c_t^p)\Big),\ \text{subject to}\ \ A_{t+1} = R_t(A_t + y_t - c_t)$$

ただし，

$$0 < \beta < 1, \quad u(c_t^p) = -\frac{1}{2}(\bar{c} - c_t^p)^2, \quad c_t = c_t^p + c_t^T, \quad \beta R_t = 1$$

とする[6]。それぞれの記号は以下の通りである。

c_t	消費
c_t^p	恒常消費
c_t^T	変動消費
R_t	t 期から $(t+1)$ 期にかけての貯蓄の収益率
A_t	t 期首の資産
y_t	労働所得
β	割引率
$u(\cdot)$	代表的家計の効用関数
$\mathrm{E}_t(\cdot)$	t 期までの情報を与えたもとでの数学的期待値

また，変動所得に関する仮定は，Friedman (1957) によると，クロス・セクション (cross section) の枠組みの中で，$\sum_i C_{it}^T = 0$ とした。ただし，C_{it}^T は t 期における i 番目の家計の変動消費である。さらに，Friedman (1957) は，C_{it}^T は恒常消費，恒常所得，変動所得と独立であると仮定した (Branson (1979) を参照せよ)。L_t を t 期の総人口とすると，$c_t^T = \dfrac{1}{L_t}\sum_i C_{it}^T$ であることに注目して，$\dfrac{1}{L_t}\sum_i C_{it}^T \approx \mathrm{E}(C_{it}^T)$ として近似することができる。$C_{it}^T = \epsilon_{it}$ は，平均ゼロ，分散 σ_ϵ^2 の互いに独立に分布すると考えると，代表的家計の変動消費 c_t^T は平均ゼロ，分散 σ_ϵ^2/L_t の分布になる。

よって，次の状態空間モデルが得られる。

(観測方程式)　$c_t = c_t^p + c_t^T$

(遷移方程式)　$c_t^p = c_{t-1}^p + \eta_t$

$$\begin{pmatrix} c_t^T \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_\epsilon^2/L_t & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} \right)$$

遷移方程式は代表的家計の効用の最大化問題を解くことによって得られるオイラー方程式 (Euler equation) である。ここでは，恒常消費 c_t^p と変動消費 c_t^T は観測不可能な変数とみなされる。そして，状態変数は恒常消費 c_t^p となる。このように，状態空間モデルを使って，恒常消費と変動消費を別々に推定することができる。Tanizaki and Mariano (1992b) は，より一般的に，効用関数を非線形 (例えば，相対的危険回避度一定の効用関数) にして，恒常消費の推定を行った。

いくつかの応用例を示したが，その他にも合理的期待変数の推定にも状態空間モデルは用いられる (McNelis and Neftci (1983), Burmeister and Wall (1982)) ことを付け加えておく。

[6] 蛇足ではあるが，次のことに注意せよ。割引率が 1 より小さいという $0 < \beta < 1$ の仮定は一般的であるが，Kocherlakota (1990) は，一人あたりの消費支出が時間と共に増加し続けるとき，利子率が正であるにもかかわらず，1 より大きな割引率になる可能性があるということを示した。実証研究において，度々，割引率の推定値が 1 より大きいという結果を持つが，この点をそれほど気に留める必要はないということを意味する。時系列データを扱う場合，消費支出は年々成長を続けているのは明かである。

以上のように，(1) と (2) の 2 つの式から成る状態空間モデルは観測されない変数 (α_t, ϵ_t, η_t) と観測される変数 (y_t, Z_t, d_t, S_t, T_t, c_t, R_t) から構成される。そして，観測されない変数 (すなわち，状態変数ベクトル α_t) を推定する問題として，予測問題 (prediction)，濾波問題 (filtering)，平滑問題 (smoothing) の 3 種類を考えることが出来る。次節ではこの 3 つの推定問題について述べる。そして，それぞれの 3 つの推定問題について，状態変数を算出するためのアルゴリズムが示される。

1.3 状態変数の推定問題

1.1 節で状態空間モデルを定義し，1.2 節では経済分野への応用例を示した。本節では，状態変数の推定問題を考える。

まず，$\mathrm{E}(\cdot|\cdot)$，$\mathrm{Var}(\cdot|\cdot)$ をそれぞれ数学的条件付き期待値，条件付き分散共分散行列とする。Ω_s を s 期に利用可能な情報集合と定義する。すなわち，$\Omega_s = \{y_s, y_{s-1}, \cdots, y_1\}$ である[7]。状態ベクトル (state-vector) の推定問題として，情報量の多さによって次の 3 種類を考えることが出来る。

定義: $\mathrm{E}(\alpha_t|\Omega_s) = a_{t|s}$, $\mathrm{Var}(\alpha_t|\Omega_s) = \Sigma_{t|s}$
推定： $t > s$ のとき予測 (プレディクション, prediction)
$t = s$ のとき濾波 (フィルタリング, filtering)
$t < s$ のとき平滑 (スムージング, smoothing)

さらに，$P(\cdot|\cdot)$ を条件付き分布関数とする。このとき，プレディクション, フィルタリング, スムージングのアルゴリズム (algorithm) はそれぞれ 1.3.1 節, 1.3.2 節, 1.3.3 節で取り扱われる。

1.3.1 プレディクション (予測推定)

本節では，予測 (プレディクション) 問題を考える。そこでは，上記の添字記号 t, s をそれぞれ $(t+k)$, t に置き換えて述べられる。すなわち，以下の問題を考える。

$$\mathrm{E}(\alpha_{t+k}|\Omega_t) = a_{t+k|t}, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

まず分布関数に基づいたプレディクション・アルゴリズムをあげておく。

$$\begin{aligned}
P(\alpha_{t+k}|\Omega_t) &= \int P(\alpha_{t+k},\ \alpha_{t+k-1}|\Omega_t)\mathrm{d}\alpha_{t+k-1} \\
&= \int P(\alpha_{t+k}|\alpha_{t+k-1},\ \Omega_t)P(\alpha_{t+k-1}|\Omega_t)\mathrm{d}\alpha_{t+k-1} \\
&= \int P(\alpha_{t+k}|\alpha_{t+k-1})P(\alpha_{t+k-1}|\Omega_t)\mathrm{d}\alpha_{t+k-1}, \qquad k = 1, 2, \cdots
\end{aligned} \tag{7}$$

3 つ目の等号が成り立つ理由 (すなわち，$P(\alpha_{t+k}|\alpha_{t+k-1},\ \Omega_t) = P(\alpha_{t+k}|\alpha_{t+k-1})$ が成り立つ理由) は，遷移方程式は t 期までの情報集合 Ω_t に依存しないからである。分布関数に基づいたプレディクション・アルゴリズムについては, Kitagawa (1987), Harvey (1989) 等を参照せよ。上に記したプレディクション・アルゴリズムでは，$P(\alpha_t|\Omega_t)$ を既知の分布関数と考える。分布関数 $P(\alpha_{t+k}|\alpha_{t+k-1})$, $k = 1, 2, \cdots$, は (2) 式で表される遷移方程式 (すなわち，$\alpha_{t+k} = T_{t+k}\alpha_{t+k-1} + c_{t+k} + R_{t+k}\eta_{t+k}$) とその中の撹乱項 η_{t+k} の分布関数をもとにして，η_{t+k} から α_{t+k} への変数変換によって計算される。それゆえに，$P(\alpha_{t+k}|\alpha_{t+k-1})$, $k = 1, 2, \cdots$, の関数形もまた既知である。したがって，$P(\alpha_t|\Omega_t)$ が与えられると，$P(\alpha_{t+1}|\alpha_t)$ を掛け合わせて，α_t について積分すると，$P(\alpha_{t+1}|\Omega_t)$ が得られる。同様に，$P(\alpha_{t+1}|\Omega_t)$ と $P(\alpha_{t+2}|\alpha_{t+1})$ から，$P(\alpha_{t+2}|\Omega_t)$ を得ることができる。

このように，$P(\alpha_{t+k}|\Omega_t)$, $k = 1, 2, \cdots$, が逐次的 (recursive) に計算されるのである。周知の通り，分布関数が得られると期待値や分散が求められる[8]。

[7] (1) 式や (2) 式の中で，$Z_t, d_t, S_t, T_t, c_t, R_t, t = 1, \cdots, T,$ のような，すべての外生変数もまた情報集合 Ω_s の中に含まれていることに注意せよ。しかし，煩雑になるのを避けるため，ここではそれらを省略する。

[8] 自明のことではあるが，一応，期待値 $a_{t|s}$ と分散 $\Sigma_{t|s}$ の定義を記しておく。

$$a_{t|s} = \mathrm{E}(\alpha_t|\Omega_s) = \int \alpha_t P(\alpha_t|\Omega_s)\mathrm{d}\alpha_t$$

さらに，上の分布関数に基づく逐次アルゴリズム (recursive algorithm) について，遷移方程式の線形性と撹乱項の正規性の仮定を置くと，次の線形の逐次アルゴリズム (linear recursive algorithm) が得られる[9]。

$$a_{t+k|t} = T_{t+k}a_{t+k-1|t} + c_{t+k} \tag{8}$$
$$\Sigma_{t+k|t} = T_{t+k}\Sigma_{t+k-1|t}T'_{t+k} + R_{t+k}Q_{t+k}R'_{t+k}, \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{9}$$

$a_{t|t}$, $\Sigma_{t|t}$ が与えられているとき， (8) 式と (9) 式から次の期の予測値 $a_{t+1|t}$ とその分散 $\Sigma_{t+1|t}$ が得られる。同様にして， $a_{t+1|t}$, $\Sigma_{t+1|t}$ から $a_{t+2|t}$, $\Sigma_{t+2|t}$ が求められる。このように (8) 式, (9) 式は，逐次計算によって， $a_{t+k|t}$, $\Sigma_{t+k|t}$, $k = 1, 2, \cdots$, を求めるアルゴリズムになっている。ここで， $a_{t|t}$, $\Sigma_{t|t}$ は次節で述べるフィルタリング推定値とその分散である。

1.3.2 フィルタリング (濾波推定)

予測問題では，現在 (t 期) の情報をもとにして将来 (k 期先) の状態変数を推定するものであるが，濾波 (フィルタリング) 問題では，現在 (t 期) に利用可能な情報をもとに現在 (t 期) の状態変数を推定するものである。ゆえに，フィルタリング問題は次の数学的期待値を求めることに等しい。

$$\mathrm{E}(\alpha_t|\Omega_t) = a_{t|t}, \qquad t = 1, 2, \cdots, T$$

分布に基づいたフィルタリング・アルゴリズムは以下のように示される。

$$P(\alpha_t|\Omega_{t-1}) = \int P(\alpha_t|\alpha_{t-1})P(\alpha_{t-1}|\Omega_{t-1})\mathrm{d}\alpha_{t-1} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} P(\alpha_t|\Omega_t) &= P(\alpha_t|y_t,\ \Omega_{t-1}) \\ &= \frac{P(\alpha_t,\ y_t|\Omega_{t-1})}{P(y_t|\Omega_{t-1})} \\ &= \frac{P(\alpha_t,\ y_t|\Omega_{t-1})}{\displaystyle\int P(\alpha_t,\ y_t|\Omega_{t-1})\mathrm{d}\alpha_t} \\ &= \frac{P(y_t|\alpha_t,\ \Omega_{t-1})P(\alpha_t|\Omega_{t-1})}{\displaystyle\int P(y_t|\alpha_t,\ \Omega_{t-1})P(\alpha_t|\Omega_{t-1})\mathrm{d}\alpha_t} \\ &= \frac{P(y_t|\alpha_t)P(\alpha_t|\Omega_{t-1})}{\displaystyle\int P(y_t|\alpha_t)P(\alpha_t|\Omega_{t-1})\mathrm{d}\alpha_t}, \qquad t = 1, 2, \cdots, T \end{aligned} \tag{11}$$

分布に基づいたフィルタリング・アルゴリズムについては，Kitagawa (1987), Harvey (1989) 等を参照せよ。(10) 式は予測方程式と呼ばれる。それは， (7) 式において， $k = 1$ かつ t を $t-1$ に置き換えたものに一致する。(11) 式については，最初の等号では $\Omega_t = \{y_t,\ \Omega_{t-1}\}$ であることが利用されている。また，5 つ目の等号について， $P(y_t|\alpha_t,\ \Omega_{t-1}) = P(y_t|\alpha_t)$ が成立するのは， (1) 式の観測方程式に過去の情報集合 Ω_{t-1} が含まれていないためである。(11) 式は更新方程式と呼ばれる。それは，過去の情報 Ω_{t-1} と t 期に得られたデータ y_t とを結び付ける役割を果たす。

(10) 式と (11) 式で与えられるアルゴリズムでは，まず，初期分布 $P(\alpha_0|\Omega_0)$ を既知とすると， (2) 式の遷移方程式 $\alpha_1 = T_1\alpha_0 + c_1 + R_1\eta_1$ を通して， (10) 式から $P(\alpha_1|\Omega_0)$ を得ることができる。次に， (1) 式の観測方程式 $y_1 = Z_1\alpha_1 + d_1 + S_1\epsilon_1$ から得られる分布関数 $P(y_1|\alpha_1)$ と (10) 式から得られた $P(\alpha_1|\Omega_0)$ とを結び付けて， $P(\alpha_1|\Omega_1)$ が

$$\Sigma_{t|s} = \mathrm{E}(\alpha_t|\Omega_s) = \int (\alpha_t - a_{t|s})(\alpha_t - a_{t|s})'P(\alpha_t|\Omega_s)\mathrm{d}\alpha_t$$

(t, s) はそれぞれ，プレディクションでは $(t+k, t)$, フィルタリングでは (t, t), スムージングでは (t, T) として置き換えられる。

[9]導出方法によっては，撹乱項の正規性の仮定は必要としない。遷移方程式が線形であれば， (2) 式の両辺に条件付き期待値と分散をとることによって， (8) 式と (9) 式に表される線形の逐次アルゴリズムが得られる。詳しくは，後述の 1.4 節を見よ。

導かれる。さらに，(10) 式によって，$P(\alpha_1|\Omega_1)$ から $P(\alpha_2|\Omega_1)$，(11) 式によって，$P(\alpha_2|\Omega_1)$ から $P(\alpha_2|\Omega_2)$ がそれぞれ得られる。このように，初期分布 $P(\alpha_0|\Omega_0)$ が与えられると，それ以降のすべての分布 ($P(\alpha_t|\Omega_{t-1}), P(\alpha_t|\Omega_t)$, $t=1,\cdots,T)$ が逐次的に計算される。

初期分布に関連して，α_0 が確率変数か非確率変数かで $t=1$ の場合の予測方程式は異なることに注意せよ。

$$P(\alpha_1|\Omega_0) = \begin{cases} P(\alpha_1|\alpha_0) & \alpha_0 \text{ が非確率変数のとき} \\ \\ \displaystyle\int P(\alpha_1|\alpha_0)P(\alpha_0)\mathrm{d}\alpha_0 & \alpha_0 \text{ が確率変数のとき} \end{cases}$$

ただし，α_0 が確率変数のとき，その分布関数は $P(\alpha_0)$ とする。

線形の観測・遷移方程式と撹乱項の正規性の仮定のもとで，(10) 式, (11) 式から得られる 1 次, 2 次の積率 (moment) から次の線形のフィルタリング・アルゴリズムが導出される[10]。

$$a_{t|t-1} = T_t a_{t-1|t-1} + c_t \tag{12}$$
$$\Sigma_{t|t-1} = T_t \Sigma_{t-1|t-1} T_t^{'} + R_t Q_t R_t^{'} \tag{13}$$
$$y_{t|t-1} = Z_t a_{t|t-1} + d_t \tag{14}$$
$$F_{t|t-1} = Z_t \Sigma_{t-1|t-1} Z_t^{'} + S_t H_t S_t^{'} \tag{15}$$
$$k_t = \Sigma_{t|t-1} Z_t^{'} F_{t|t-1}^{-1} \tag{16}$$
$$a_{t|t} = a_{t|t-1} + k_t(y_t - y_{t|t-1}) \tag{17}$$
$$\Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - k_t F_{t|t-1} k_t^{'}, \qquad t=1,2,\cdots,T \tag{18}$$

ただし，初期条件は $a_{0|0}=a_0, \Sigma_{0|0}=\Sigma_0$ である。

(12) 式と (13) 式は，(10) 式の予測方程式 $P(\alpha_t|\Omega_{t-1})$ から得られ，α_t の $(t-1)$ 期からみた予測に相当する。(14) 式と (15) 式は，(11) 式の更新方程式の分母にあたる $P(y_t|\Omega_{t-1})$ から得られる。これは，y_t の $(t-1)$ 期までの情報を与えたもとでの予測である。(17) 式と (18) 式は，(11) 式の更新方程式 $P(\alpha_t|\Omega_t)$ から得られる。このように，(12) 式 ∼ (15) 式は予測方程式と解釈され，(17) 式と (18) 式はフィルタリング推定値を与え，過去の情報をもとに現在に入手されたデータで予測値を更新する働きを持つ。さらに，(16) 式の k_t はカルマン・ゲイン (Kalman gain) と呼ばれ，y_t の予測誤差 $(y_t - y_{t|t-1})$ とフィルタリング推定値 $a_{t|t}$ との共分散がゼロ[11] という条件を満たしている。

(12) 式 ∼ (18) 式によって表されるアルゴリズムによると，まず初期値 $a_{0|0}, \Sigma_{0|0}$ が与えられると予測方程式 (12) ∼ (15) によって，$a_{1|0}, \Sigma_{1|0}, y_{1|0}, F_{1|0}$ が得られる。そして，カルマン・ゲイン k_1 を通して，更新方程式 (17), (18) から，$a_{1|1}, \Sigma_{1|1}$ が得られる。このようにして，$a_{t-1|t-1}, \Sigma_{t-1|t-1}$ から，(12) ∼ (15) 式によって $a_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1}, y_{t|t-1}, F_{t|t-1}$ が，さらに，(17) と (18) 式によって $a_{t|t}, \Sigma_{t|t}$ が逐次計算によって得られる。$y_{t|t-1}$，$F_{t|t-1}$ は，y_t の予測，予測誤差分散をそれぞれ表す。

このように，(12) ∼ (18) の逐次アルゴリズムをみると，カルマン・フィルタ・モデルとはある新しい観測値が利用可能となる度ごとに状態変数を推定しなおすというモデルであり，逐次一般化最小自乗法 (GLS) に等しいことがわかる[12]。これは元来工学的な手法[13] であるため，経済面にこれを適用するにはいくつかの問題点がある。一つは初期値を推定しなければならないこと (カルマン・フィルタでは状態変数の初期値とその分散が与えられると，逐次的な計算によって，それ以降のすべての期の状態変数の推定値を求めることができる) である。そして，初期値に近いほどフィルタリング推

[10] この (12) 式 (18) 式によって表される線形の逐次アルゴリズムを，特に，カルマン・フィルタと呼ぶ。Kalman は線形確率システムの状態空間表現と最小分散推定の理論を組み合わせることにより，フィルタリング問題も定式化を行い，直交射影の定理を用いてフィルタリング・アルゴリズムを導出した。

一般に，このカルマン・フィルタ・アルゴリズムは撹乱項の正規性の仮定を必要としない。観測・遷移方程式の線形性の仮定のみで線形の逐次アルゴリズムは導出され得る。

[11] このことを,「y_t の予測誤差 $(y_t - y_{t|t-1})$ とフィルタリング推定値 $a_{t|t}$ とは直交する」ともいう。

[12] (2) 式において，$T_t = I_k, c_t = 0, R_t = 0$ のとき，(12) 式から (18) 式で表されるモデルは，逐次最小自乗法 (recursive least squares) に一致する。ただし，I_k は $k\times k$ の単位行列とする。逐次最小自乗法とは，t 期 ($t=k,\cdots,T)$ までのデータを用いてパラメータを推定するという方法であり，すなわち，データが追加される度毎にその都度パラメータを推定する方法である。カルマン・フィルタ・モデルは，t 期の状態変数を推定するのに，t 期に近いデータに分散共分散のウエイト (weight) を小さく置き，t 期から過去に離れれば離れるほどそのウエイトを増大させて，推定値を求めるという方法であり，いわゆる，逐次一般化最小自乗法に一致する。詳しくは，逐次最小自乗法については Harvey (1981, 1990) を参照せよ。またカルマン・フィルタ・モデルと GLS の同値性については Sant (1977), Chow (1983) を参照せよ。

[13] 経済学では，毎期毎期の状態変数の推定値の値が問題になるのに対して，工学では，何期間位で状態変数の推定値は安定するのかが主題になっているようである。問題の着眼点が異なるようである。

定値は初期値の値に影響され，推定値の動きは不安定である。初期値に近いほど状態変数を推定するための情報量は少ないからである。

1.3.3 スムージング (平滑推定)

状態変数の推定問題の中のスムージングについて述べる。スムージングには，3 つの種類がある (Anderson and Moore (1979), 片山 (1983), Harvey (1989))。すなわち，

固定点 (fixed-point) スムージング:

$a_{k|t}$, $\quad t=1,2,\cdots$ $\quad$ ただし， k はある固定された点

固定ラグ (fixed-lag) スムージング:

$a_{t|t+L}$, $\quad t=1,2,\cdots,T-L$ $\quad$ ただし， L はある一定の値

固定区間 (fixed-interval) スムージング:

$a_{t|T}$, $\quad t=1,2,\cdots,T$ $\quad$ ただし， T は標本数

の 3 種類である。初期状態をデータから推定するのに固定点スムージングは有効であり，一定時間の遅れを伴う場合には固定ラグ・スムージングが有効とされ，過去に起こったことをデータから分析する場合には固定区間スムージングが適している。経済学においては，いままでに利用可能なデータを用いて過去の経済状況を分析する場合が多いようであるので，ここでは，スムージングの中でも，経済学で最も有用な固定区間スムージングのみを考える[14]。すなわち，以下の期待値について述べる。

$$\mathrm{E}(\alpha_t|\Omega_T)=a_{t|T}, \qquad t=T,T-1,\cdots,1$$

1.3.1 節, 1.3.2 節と同様に，まず初めに，分布に基づいたスムージング・アルゴリズムについて説明する。アルゴリズムは以下の通りである。

$$\begin{aligned}
P(\alpha_{t-1}|\Omega_T) &= \int P(\alpha_t,\ \alpha_{t-1}|\Omega_T)\mathrm{d}\alpha_t \\
&= \int P(\alpha_t|\Omega_T)P(\alpha_{t-1}|\alpha_t,\ \Omega_T)\mathrm{d}\alpha_t \\
&= \int P(\alpha_t|\Omega_T)P(\alpha_{t-1}|\alpha_t,\ \Omega_{t-1})\mathrm{d}\alpha_t \\
&= \int P(\alpha_t|\Omega_T)\frac{P(\alpha_{t-1},\ \alpha_t|\Omega_{t-1})}{P(\alpha_t|\Omega_{t-1})}\mathrm{d}\alpha_t \\
&= P(\alpha_{t-1}|\Omega_{t-1})\int \frac{P(\alpha_t|\Omega_T)P(\alpha_t|\alpha_{t-1})}{P(\alpha_t|\Omega_{t-1})}\mathrm{d}\alpha_t, \qquad t=T,T-1,\cdots,1 \qquad (19)
\end{aligned}$$

である。以上の分布に基づいたスムージング・アルゴリズムについては，Kitagawa (1987), Harvey (1989) 等を参照せよ。フィルタリング・アルゴリズムの (10) 式と (11) 式から得られる分布関数 $P(\alpha_{t-1}|\Omega_{t-1})$, $P(\alpha_t|\Omega_{t-1})$ と遷移方程式から得られる $P(\alpha_t|\alpha_{t-1})$ をもとにして， $P(\alpha_t|\Omega_T)$ から $P(\alpha_{t-1}|\Omega_T)$ へと，分布関数に基づいたスムージングの分布関数は (19) によって逐次的に求められる。ただし，スムージングの T 期の分布関数は，フィルタリングの T 期のものに一致することに注意せよ。このように，固定区間スムージングは， (10) ～ (11) によって表される分布関数に基づいたフィルタリング・アルゴリズムと共に用いられる。そして，計算の手順としては，フィルタリング・アルゴリズムから得られた分布関数をもとにして，スムージングの分布関数は逆向きの逐次計算 (backward recursion) によって求められる。また，フィルタリングにおいては，初期値に近い推定値は不安定であると述べた。しかし，固定区間スムージングは，すべての t について，同じ情報量 Ω_T で t 期の状態変数 α_t を推定する。よって，フィルタリングのように初期値に近い状態変数の推定値はばらつきが大きいという意味で不安定であるという欠点をスムージングは持たない。経済学に状態空間モデルを応用する場合，この固定区間スムージングによる状態変数の推定が最も有用であるように思われる。

[14]固定点スムージング，固定ラグ・スムージングについては，Anderson and Moore (1979), 片山 (1983), Harvey (1990) 等を参照せよ。

なぜなら，先に述べた通り，経済学では利用可能なすべてのデータをもとにして過去の出来事を分析することが多いようである。

線形の観測・遷移方程式と攪乱項の正規性の仮定のもとで，本稿では証明を加えないが， (19) 式から α_t の条件付き期待値と分散を計算することによって

$$C_{t-1} = \Sigma_{t-1|t-1} T_t^{'} \Sigma_{t|t-1}^{-1} \tag{20}$$

$$a_{t-1|T} = a_{t-1|t-1} + C_{t-1}(a_{t|T} - a_{t|t-1}) \tag{21}$$

$$\Sigma_{t-1|T} = \Sigma_{t-1|t-1} + C_{t-1}(\Sigma_{t|T} - \Sigma_{t|t-1}) C_{t-1}^{'}, \qquad t = T, T-1, \cdots, 1 \tag{22}$$

の固定区間スムージング・アルゴリズムが導かれる。プレディクション $\Sigma_{t|t-1}$ とフィルタリング $\Sigma_{t-1|t-1}$ が与えられると， (20) 式から， C_{t-1} が計算される。同様に， $\Sigma_{t|t-1}$, $\Sigma_{t-1|t-1}$, C_{t-1}, $a_{t|t-1}$, $a_{t-1|t-1}$, $\Sigma_{t|T}$, $a_{t|T}$ から， (21) 式と (22) 式を通して， $\Sigma_{t-1|T}$ と $a_{t-1|T}$ が得られる。計算手順としては，まず (12) ～ (18) を用いて $a_{t|t-1}$, $\Sigma_{t|t-1}$, $a_{t|t}$, $\Sigma_{t|t}$ ($t = 1, 2, \cdots, T$) を求めておく。次に (20) ～ (22) によって， $a_{t|T}$, $\Sigma_{t|T}$ ($t = T, T-1, \cdots, 1$) が得られる。このように，スムージング・アルゴリズムは，プレディクションとフィルタリングをもとにして，逆向きの逐次アルゴリズム (backward recursive algorithm) となっている。

最後に，遷移方程式について， $T_t = I_k$, $c_t = 0$, $R_t = 0$ の場合を考える。この場合， (12) ～ (18) のカルマン・フィルター・アルゴリズムは逐次最小自乗法に等しいことが知られていることは既に述べたが，(20) ～ (22) で与えられるカルマン・スムージング・アルゴリズムの場合は，すべての t について，状態変数の推定値 $a_{t|T}$ とその分散 $\Sigma_{t|T}$ は同じ値になり，その値は T 個のすべてのデータを使って最小自乗法 (OLS) によって推定された推定値に等しい。

本節では，プレディクション, フィルタリング, スムージングについて，分布関数の逐次アルゴリズム (7), (10) ～ (11), (19) とよく知られた通常用いられる線形の逐次アルゴリズム (8) ～ (9), (12) ～ (18), (20) ～ (22) の 2 つのタイプのアルゴリズムを紹介した。3 つの推定問題について，分布関数の逐次アルゴリズムから，観測・遷移方程式の線形性と攪乱項の正規性の仮定を置いて計算すると，線形の逐次アルゴリズムを導出することができる。しかし，線形の逐次アルゴリズムを求めるためには正規性の仮定を必ずしも必要としない。詳しくは，次節のカルマン・フィルタ・モデルのアルゴリズムの導出方法を参照せよ。本稿では，線形の逐次アルゴリズムのみを使って分析を行う。分布関数による逐次アルゴリズムは，線形の逐次アルゴリズムを導出する際に，利用されるので本節で紹介しておいた[15]。次節では，プレディクション, フィルタリング, スムージングの 3 つのアルゴリズムのうち，特にフィルタリングのみに焦点をあてて議論を進める。

1.4 カルマン・フィルタ・モデルの導出と解釈

1.3 節では，プレディクション, フィルタリング, スムージングのアルゴリズムをそれぞれ紹介した。本節では， (12) 式 ～ (18) 式によって表されるカルマン・フィルタ・モデルのアルゴリズムを導出のみを考える[16]。導出方法はいくつか考案され，それぞれはカルマン・フィルタ・モデルの解釈に密接に関連している。ここでは，分布関数に基づいて導出する方法 (Anderson and Moore (1979), Kitagawa (1987), Harvey (1989))，混合推定による導出 (Cooley (1977), Harvey (1981), Diderrich (1985), Fomby, Hill and Johnson (1988))，線形最小分散推定量 (片山 (1983), Burridge and Wallis (1988)) としての解釈の 3 つを紹介する。分布関数に基づく導出は線形性と正規性の両方の仮定を必要とするが，混合推定や線形最小分散推定量としての導出には，線形性は必要な仮定であるが，正規性の仮定は必要でない。混合推定量, 線形最小分散推定量としての導出について，単に 2 次の積率までわかれば，アルゴリズムは導き出せる。その他にも，直行斜影の利用 (Anderson and Moore (1979), 片山 (1983), Chow (1983), Brockwell and Davis (1987))，一般化最小自乗法 (Sant (1977), Chow (1983)) による証明等が考えられる。

このように，同じフィルタリング・アルゴリズムが得られるにしても，導出方法は様々である。

[15] 最近の流れとしては，この分布関数自体を数値積分やモンテ・カルロ積分で近似しようという方向に向かっている。分布関数の近似による方法は非線形関数や非正規分布を取り扱うことができる。

[16] プレディクション, スムージング・アルゴリズムの導出については， Jazwinski (1970), Anderson and Moore (1979), 片山 (1983), Harvey (1989) 等の他の文献に譲る。最も考え方の簡単な導出方法 (計算自体は複雑であるが) は， (7) 式と (19) 式で表される分布関数のプレディクション, スムージング・アルゴリズムをもとにして，観測・遷移方程式の線形性と攪乱項の正規性を仮定すると，プレディクション (8), (9) 式とスムージング (20) 式 ～ (22) 式の線形の逐次アルゴリズムがそれぞれ導き出される。

1.4.1 正規分布の仮定

(10) 式, (11) 式に基づいて，カルマン・フィルタ・モデルのアルゴリズム (12) ~ (18) を導出する。もし，初期分布 $P(\alpha_0|\Omega_0)$ と撹乱項 $\epsilon_t,\ \eta_t$ が正規分布なら， $P(\alpha_t|\Omega_{t-1}),\ P(\alpha_t|\Omega_t)$ も正規分布となる。ゆえに，まず $P(\alpha_{t-1}|\Omega_{t-1})$ を平均 $a_{t-1|t-1}$, 分散 $\Sigma_{t-1|t-1}$ の正規分布とする。$k\times 1$ の次元の確率変数 x が平均 μ, 分散 Σ の正規分布 $P(x)$ に従うとするとき， $P(x)=\Phi(x-\mu,\ \Sigma)$ と書くことにする。すなわち，

$$\Phi(x-\mu,\ \Sigma)=(2\pi)^{-\frac{k}{2}}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\big(-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\big)$$

と定義する。このとき，条件付き分布 $P(\alpha_{t-1}|\Omega_{t-1})$ は，次のように書き表される。

$$P(\alpha_{t-1}|\Omega_{t-1})=\Phi(\alpha_{t-1}-a_{t-1|t-1},\ \Sigma_{t-1|t-1})$$

同様に， α_t の分布 $P(\alpha_t|\alpha_{t-1})$ と $P(\alpha_t|\Omega_{t-1})$ は，それぞれ，

$$\begin{aligned}P(\alpha_t|\alpha_{t-1})&=\Phi(\alpha_t-T_t\alpha_{t-1}-c_t,\ R_tQ_tR'_{t-1})\\ P(\alpha_t|\Omega_{t-1})&=\Phi(\alpha_t-a_{t|t-1},\ \Sigma_{t|1-1})\end{aligned}$$

となる。一方，分布関数による一期先の予測方程式は上述の (10) 式

$$P(\alpha_t|\Omega_{t-1})=\int P(\alpha_t|\alpha_{t-1})P(\alpha_{t-1}|\Omega_t)\mathrm{d}\alpha_{t-1}$$

で表されるので，

$$\begin{aligned}P(\alpha_t|\Omega_{t-1})&=\Phi(\alpha_t-a_{t|t-1},\ \Sigma_{t|t-1})\\ &=\int P(\alpha_t|\alpha_{t-1})P(\alpha_{t-1}|\Omega_{t-1})\mathrm{d}\alpha_{t-1}\\ &=\int\Phi(\alpha_t-T_t\alpha_{t-1}-c_t,\ R_tQ_tR'_t)\ \Phi(\alpha_{t-1}-a_{t-1|t-1},\ \Sigma_{t-1|t-1})\mathrm{d}\alpha_{t-1}\\ &=\Phi(\alpha_t-T_ta_{t-1|t-1}-c_t,\ T_t\Sigma_{t-1|t-1}T'_t+R_tQ_tR'_t)\end{aligned}$$

を得る。1 行目の等号は定義による。4 行目の等式が成り立つことは補論 2 の証明 1 で証明されている[17]。1 行目と 4 行目のそれぞれの要素を比較して， (12) 式, (13) 式の予測方程式が得られる。

更新方程式については,

$$\begin{aligned}P(\alpha_t|\Omega_t)&=\Phi(\alpha_t-a_{t|t},\ \Sigma_{t|t})\\ &=\frac{P(y_t|\alpha_t)P(\alpha_t|\Omega_{t-1})}{\displaystyle\int P(y_t|\alpha_t)P(\alpha_t|\Omega_{t-1})\mathrm{d}\alpha_t}\\ &=\frac{\Phi(y_t-Z_t\alpha_t-d_t,\ S_tH_tS'_t)\ \Phi(\alpha_t-a_{t|t-1},\ \Sigma_{t|t-1})}{\displaystyle\int\Phi(y_t-Z_t\alpha_t-d_t,\ S_tH_tS'_t)\ \Phi(\alpha_t-a_{t|t-1},\ \Sigma_{t|t-1})\mathrm{d}\alpha_t}\\ &=\Phi\big(\alpha_t-a_{t|t-1}-k_t(y_t-y_{t|t-1}),\ \Sigma_{t|t-1}-k_tF_{t|t-1}k'_t\big)\end{aligned}$$

が得られる。1 行目は定義であり，2 行目以降は

$$\begin{aligned}\int P(y_t|\alpha_t)P(\alpha_t|\Omega_{t-1})\mathrm{d}\alpha_t&=\int P(y_t,\ \alpha_t|\Omega_{t-1})\mathrm{d}\alpha_t\\ &=P(y_t|\Omega_{t-1})\\ &=\Phi(y_t-y_{t|t-1},\ F_{t|t-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(y_t|\alpha_t)P(\alpha_t|\Omega_{t-1})&=\Phi(y_t-Z_t\alpha_t-d_t,\ S_tH_tS'_t)\ \Phi(\alpha_t-a_{t|t-1},\ \Sigma_{t|t-1})\\ &=\Phi\big(\alpha_t-a_{t|t-1}-k_t(y_t-y_{t|t-1}),\ \Sigma_{t|t-1}-k_tF_{t|t-1}k'_t\big)\ \Phi(y_t-y_{t|t-1},\ F_{t|t-1})\end{aligned}\qquad(23)$$

[17] このあたりの多変量正規分布に関する計算については，岩田 (1967) を参照せよ。

であることに注意せよ。(23) 式の 2 つ目の等式が成立することは補論 2 の証明 2 で証明されている。ただし，

$$
\begin{aligned}
&y_{t|t-1} = Z_t a_{t|t-1} + d_t \\
&F_{t|t-1} = Z_t \Sigma_{t|t-1} Z_t' + S_t H_t S_t' \\
&k_t = \Sigma_{t|t-1} Z_t' F_{t|t-1}^{-1}
\end{aligned}
$$

である。

同様に，更新方程式についても，平均と分散をそれぞれ比較することにより，(17) 式と (18) 式が得られる。

導出その 2： 正規分布に基づいた導出について，以下に示す方法はより簡単である。まず，予測方程式については，両辺に条件付き期待値とその分散をとることにより，容易に得られる[18]。更新方程式を得るために，α_t と y_t の条件付き結合分布 $P(\alpha_t,\ y_t|\Omega_{t-1})$ を考える。そして，これは多変数正規分布であるので[19]，情報 Ω_{t-1} を与えたもとでの条件付き結合分布 $P(\alpha_t,\ y_t|\Omega_{t-1})$ は

$$
\begin{pmatrix} \alpha_t \\ y_t \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} a_{t|t-1} \\ y_{t|t-1} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \Sigma_{t|t-1} & \Sigma_{t|t-1} Z_t' \\ Z_t \Sigma_{t|t-1} & F_{t|t-1} \end{pmatrix} \right)
$$

として書ける[20]。ここで，定理 3 を使うと，条件付き分布 $P(\alpha_t|y_t,\ \Omega_{t-1})$ は

$$
\alpha_t \sim N(a_{t|t-1} - k_t(y_t - y_{t|t-1}),\ \Sigma_{t|t-1} - k_t F_{t|t-1} k_t)
$$

として得られる。ただし，$k_t = \Sigma_{t|t-1} Z_t' F_{t|t-1}^{-1}$ を定義する。さらに，$P(\alpha_t|\Omega_t)$ は $\alpha_t \sim N(a_{t|t},\ \Sigma_{t|t})$ として書き表すこともでき，これを利用して，それぞれの要素を比較すると

$$
\begin{aligned}
&a_{t|t} = a_{t|t-1} - k_t(y_t - y_{t|t-1}) \\
&\Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - k_t F_{t|t-1} k_t
\end{aligned}
$$

が容易に導き出される。

正規分布の仮定に基づいて，ここでは 2 つの導出方法を紹介した。このように，観測方程式と遷移方程式が共に線形で，2 つの方程式に含まれる撹乱項が共に正規分布に従うとき，フィルタリング・アルゴリズムは (10) ∼ (11) から (12) ∼ (18) へ書き換えられる。

次の 2 つの節では，正規分布の仮定を置かないで，同じフィルタリング・アルゴリズムが導出される。

1.4.2 混合推定

予測方程式 (12), (13) については，遷移方程式の両辺に条件付き期待値とその分散をとって容易に得られる。ここには，撹乱項に正規分布の仮定を必要としない。

[18] 遷移方程式は線形なので，α_0, η_1 が正規分布なら α_1 もまた正規分布に従う。よって，すべての $\alpha_t,\ t = 1, \cdots, T,$ もまた正規分布となる。同様に，条件付き分布もまた正規分布である。

[19] さらに，観測方程式についても，$\alpha_t, \epsilon_t,\ t = 1, \cdots, T,$ は正規分布なので，2 つの正規分布の和である y_t も正規分布に従う。

[20] 平均と分散の各要素を求めておく。まず，それぞれの条件付き期待値の要素は

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\alpha_t|\Omega_{t-1}) = a_{t|t-1} = T_t a_{t|t-1} + c_t \\
&\mathrm{E}(y_t|\Omega_{t-1}) = y_{t|t-1} = Z_t a_{t|t-1} + d_t
\end{aligned}
$$

となり，その分散共分散のそれぞれの要素は

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Big((\alpha_t - a_{t|t-1})(\alpha_t - a_{t|t-1})'|\Omega_{t-1}\Big) = \Sigma_{t|t-1} \\
&\mathrm{E}\Big((y_t - y_{t|t-1})(\alpha_t - a_{t|t-1})'|\Omega_{t-1}\Big) = Z_t \\
&\mathrm{E}\Big((\alpha_t - a_{t|t-1})(\alpha_t - a_{t|t-1})'|\Omega_{t-1}\Big) = Z_t \Sigma_{t|t-1} \\
&\mathrm{E}\Big((y_t - y_{t|t-1})(y_t - y_{t|t-1})'|\Omega_{t-1}\Big) = F_{t|t-1}
\end{aligned}
$$

として計算される。

α_t は，以下のように，期待値 $a_{t|t-1}$ と撹乱項 ξ_t の和の形で書き直すことができる。

$$\alpha_t = a_{t|t-1} + \xi_t \tag{24}$$

ただし， $\mathrm{E}(\xi_t|\Omega_{t-1}) = 0$, $\mathrm{Var}(\xi_t|\Omega_{t-1}) = \Sigma_{t|t-1}$ であることに注意せよ。

更新方程式を得るためには，観測方程式と (24) 式を使う。2 つの式をもう一度以下に書く。

$$y_t = Z_t\alpha_t + d_t + S_t\epsilon_t$$
$$a_{t|t-1} = \alpha_t - \xi_t$$

すでに利用可能な情報と新しく入手される情報とを結び付ける役割を果たすのが更新方程式である。ここで，すでに利用可能な情報とは $a_{t|t-1}$ を指し，新しく入手される情報とは y_t のことである。α_t の期待値 $a_{t|t-1}$ は $(t-1)$ 期までの情報 Ω_{t-1} を使って得られたものであり，事前情報 (prior information) を意味する。他方，観測方程式は標本情報 (sample information, すなわち， t 期の情報) となる。2 つの式を結び付けて α_t を同時推定すると， t 期までの情報をすべて含んで α_t が推定されることになる[21]。

上の 2 つの式をまとめて行列で表示し直すと，

$$\begin{pmatrix} y_t - d_t \\ a_{t|t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_t \\ I_k \end{pmatrix} \alpha_t + \begin{pmatrix} S_t & 0 \\ 0 & -I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \xi_t \end{pmatrix} \tag{25}$$

となる。そして，撹乱項の期待値はゼロであり，その分散は,

$$\mathrm{Var}\left(\begin{pmatrix} S_t & 0 \\ 0 & -I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \xi_t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} S_tH_tS_t' & 0 \\ 0 & \Sigma_{t|t-1} \end{pmatrix}$$

と表される。ここに一般化最小自乗法 (GLS) を適用すると α_t の推定値は $a_{t|t}$ として与えられる。すなわち,

$$\begin{aligned} a_{t|t} &= \left((Z_t' \;\; I_k) \begin{pmatrix} S_tH_tS_t' & 0 \\ 0 & \Sigma_{t|t-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Z_t \\ I_k \end{pmatrix} \right)^{-1} (Z_t' \;\; I_k) \begin{pmatrix} S_tH_tS_t' & 0 \\ 0 & \Sigma_{t|t-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_t - d_t \\ a_{t|t-1} \end{pmatrix} \\ &= \big(Z_t'(S_tH_tS_t')^{-1}Z_t + \Sigma_{t|t-1}^{-1} \big)^{-1} \big(Z_t'(S_tH_tS_t')^{-1}(y_t - d_t) + \Sigma_{t|t-1}^{-1} a_{t|t-1} \big) \end{aligned}$$

また， $a_{t|t}$ の分散 $\Sigma_{t|t}$ は,

$$\begin{aligned} \Sigma_{t|t} &= (Z_t'(S_tH_tS_t')^{-1}Z_t + \Sigma_{t|t-1}^{-1})^{-1} \\ &= \Sigma_{t|t-1} - \Sigma_{t|t-1}Z_t'(Z_t\Sigma_{t|t-1}Z_t' + S_tH_tS_t')^{-1}Z_t\Sigma_{t|t-1} \\ &= \Sigma_{t|t-1} - k_t(Z_t\Sigma_{t|t-1}Z_t' + S_tH_tS_t')k_t' \\ &= \Sigma_{t|t-1} - k_tF_{t|t-1}k_t' \end{aligned}$$

となる。計算の途中 (2 行目の等式) で本節末の定理 1 (行列の逆転公式) を使っている。ただし， k_t は

$$k_t = \Sigma_{t|t-1}Z_t'F_{t|t-1}^{-1}$$

として表される。

このように更新方程式が導出される。導出の過程で， $H_t \neq 0$ が仮定されなければならない。なぜなら， $H_t = 0$ の場合は (25) 式の撹乱項の分散共分散行列が特異になるためである。しかし，この仮定は Theil (1971) によって緩められた。すなわち， $H_t = 0$ の場合にも (12) 式 ∼ (18) 式のカルマン・フィルター・アルゴリズムは適用され得るということが示されるのである。この $H_t = 0$ は 1.2.2 節の ARMA モデルのケースに相当するということを記しておく。

[21]混合推定に関する文献は，Johnston (1972) が適当である。また，カルマン・フィルタ・モデルは，混合推定の考え方に一致することを示したものは，Diderrich (1985), Harvey (1981) がある。

1.4.3 線形最小分散推定量

線形最小分散推定量としてのカルマン・フィルタもまた撹乱項に分布関数の仮定を必要としない。予測方程式 (12), (13) は前節と同様，遷移方程式 (2) の両辺に $(t-1)$ 期までの情報をもとにした条件付き期待値とその分散をとることによって得られる。

更新方程式を導出するために，まず， $a_{t|t}$ は以下の式で表されることを記しておく。

$$a_{t|t} = A_t a_{t-1|t-1} + B_t c_t + D_t d_t + k_t y_t$$

$a_{t|t}$ は情報 Ω_t のもとでの α_t の条件付き期待値を意味する。また，観測・遷移方程式は線形である。この 2 つのことから，$a_{t|t}$ は，上式に表されるように， Ω_{t-1} までの情報を含む $a_{t-1|t-1}$ と今期の情報 c_t, d_t, y_t の線形関数として表される。$a_{t|t}$ は最小線形不偏推定量になるように， A_t, B_t, D_t, k_t を求める。$e_t = \alpha_t - a_{t|t}$ を定義する。このとき，

$$\begin{aligned}
e_t &= \alpha_t - A_t a_{t-1|t-1} - B_t c_t - D_t d_t - k_t y_t \\
&= (T_t\alpha_{t-1} + c_t + R_t\eta_t) - A_t(\alpha_{t-1} - e_{t-1}) - B_t c_t - D_t d_t - k_t\big(Z_t(T_t\alpha_{t-1} + c_t + R_t\eta_t) + d_t + S_t\epsilon_t\big) \\
&= A_t e_{t-1} + (T_t - A_t - k_t Z_t T_t)\alpha_{t-1} + (I_k - B_t - k_t Z_t)c_t - (D_t + k_t)d_t + (I_k - k_t Z_t)R_t\eta_t - k_t S_t\epsilon_t
\end{aligned}$$

として変形される。計算の際には，以下のものを代入している。

$$\begin{aligned}
\alpha_t &= T_t\alpha_{t-1} + c_t + R_t\eta_t \\
a_{t-1|t-1} &= \alpha_{t-1} - e_{t-1} \\
y_t &= Z_t\alpha_t + d_t + S_t\epsilon_t \\
&= Z_t(T_t\alpha_{t-1} + c_t + R_t\eta_t) + d_t + S_t\epsilon_t
\end{aligned}$$

$a_{t|t}$ が不偏であるためには， e_t の式の両辺に期待値をとるとゼロになることから，

$$\begin{aligned}
&T_t - A_t - k_t Z_t T_t = 0 \\
&I_k - B_t - k_t Z_t = 0 \\
&D_k + k_t = 0
\end{aligned}$$

とならなければならない。よって， A_t, B_t, D_t を消去して整理すると， e_t は以下のように書き直される。

$$e_t = (I_k - k_t Z_t)(T_t e_{t-1} + R_t\eta_t) - k_t S_t\epsilon_t$$

上の式には k_t が含まれている。次に e_t が最小分散を持つような k_t を求める。 $e_{t-1}, \eta_t, \epsilon_t$ は互いに無相関であるので，e_t の分散 (e_t は t 期までの情報 Ω_t を含むので， $\Sigma_{t|t}$ と定義することができる) は，

$$\begin{aligned}
\Sigma_{t|t} &= (I_k - k_t Z_t)(T_t\Sigma_{t-1|t-1}T_t' + R_t Q_t R_t')(I_k - k_t Z_t)' + k_t S_t H_t S_t' k_t' \\
&= (I_k - k_t Z_t)\Sigma_{t|t-1}(I_k - k_t Z_t)' + k_t S_t H_t S_t' k_t'
\end{aligned}$$

となり， k_t が

$$k_t = \Sigma_{t|t-1}Z_t' F_{t|t-1}^{-1} \qquad \text{ただし，} F_{t|t-1} = Z_t\Sigma_{t|t-1}Z_t' + S_t H_t S_t' \text{ とする。}$$

の値をとるとき，他のどんな k_t についても (すなわち， k_t^* とする)， $\Sigma_{t|t}(k_t^*) - \Sigma_{t|t}(k_t)$ は半正値定符号行列となることが証明される (片山 (1983))。ただし， $\Sigma_{t|t}(k_t)$ は， $\Sigma_{t|t}$ が k_t の関数であることを明示的に表したものであることを示す。$a_{t|t-1} = T_t a_{t-1|t-1} + c_t$ を考慮にいれて，まとめると，

$$\begin{aligned}
a_{t|t} &= a_{t|t-1} + k_t(y_t - Z_t a_{t|t-1} - d_t) \\
\Sigma_{t|t} &= \Sigma_{t|t-1} - k_t F_{t|t-1} k_t'
\end{aligned}$$

となる。このようにして，カルマン・フィルタ・アルゴリズムが導出される。k_t は， $a_{t|t}$ が最小分散になるように求められることから，カルマン・ゲインと呼ばれる。

本節では，カルマン・フィルタの線形の逐次アルゴリズムにのみ焦点をあてて，その導出方法を考察した。同じアルゴリズムが 3 つの異なった方法で導き出された。1.4.1 節では正規分布に基づいて導出を行ったが，1.4.2 節, 1.4.3 節では分布には依存しない方法をとった。また，1.4.3 節の線形最小分散推定量としての導出については， (1) 式と (2) 式の状態空間モデルの撹乱項 ϵ_t, η_t が互いに相関がある場合にでも，簡単にフィルタリング・アルゴリズムを求めることができる[22]。

本節の最後に，未知パラメータ θ が状態空間モデルに含まれている場合の θ の推定問題について考える。すなわち，(1) 式と (2) 式の Z_t, d_t, S_t, H_t, T_t, c_t, R_t, Q_t が θ の関数である場合は， θ の推定値を使って，状態変数の推定値 $a_{t+k|t}$, $a_{t|t}$, $a_{t|T}$ を対応するアルゴリズムから求めなければならない。このケースの 1 つの例として，1.2.1 節の可変パラメータ・モデルをとると，未知パラメータ θ は (6) の σ^2, R に対応する。

1.5　最尤法による未知パラメータの推定

線形の逐次アルゴリズムとして知られているカルマン・フィルタ・アルゴリズムは分布関数の仮定を必要としなくても導出され得るということを前節で証明した。前節までは，観測・遷移方程式の中に未知パラメータが含まれていない状況を考えた。しかし，通常の推定には大抵の場合，方程式に未知パラメータが含まれる。本節では， (1) 式と (2) 式の観測・遷移方程式に未知パラメータ (例えば， θ) が含まれる場合，どのようにして未知パラメータと状態変数を推定するのかを考える。

未知パラメータの推定に通常よく用いられる方法は最尤法 (maximum likelihood estimation) である。これは尤度 (likelihood) を最大にするような未知パラメータの値をその推定値とするものであるので，この場合，撹乱項の分布関数の仮定を必要とする。1.4.1 節で述べたように，正規分布を仮定した場合は通常の線形の逐次アルゴリズムが導かれるのでここでは正規分布を用いる。

次の尤度関数はイノヴェーション・フォーム (innovation form) と呼ばれる。

$$P(y_T, y_{T-1}, \cdots, y_1) = P(y_T|\Omega_{T-1})P(y_{T-1}|\Omega_{T-2})\cdots P(y_2|y_1)P(y_1) = \prod_{t=1}^{T} P(y_t|\Omega_{t-1}) \tag{26}$$

ここで， $P(y_1) = P(y_1|\Omega_0)$ とみなされる。$P(y_t|\Omega_{t-1})$ は (11) 式の分母に当たり，次のように表される。

$$P(y_t|\Omega_{t-1}) = \int P(y_t|\alpha_t)P(\alpha_t|\Omega_{t-1})\mathrm{d}\alpha_t$$

もし，観測・遷移方程式が線形で，撹乱項が正規分布ならば， $P(y_t|\Omega_{t-1})$ は，平均 $y_{t|t-1} = Z_t a_{t|t-1} + d_t$, 分散 $F_{t|t-1} = Z_t\Sigma_{t|t-1}Z_t' + S_t H_t S_t'$ の正規分布に従う。すなわち，

$$\begin{aligned} P(y_t|\Omega_{t-1}) &= \Phi(y_t - y_{t|t-1},\ F_{t|t-1}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{g}{2}}|F_{t|t-1}|^{-\frac{1}{2}}\exp\big(-\frac{1}{2}(y_t - y_{t|t-1})'F_{t|t-1}^{-1}(y_t - y_{t|t-1})\big) \end{aligned}$$

である。よって，線形性・正規性の仮定のもとで (26) 式のイノヴェーション・フォームによる対数尤度関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \log\big(P(y_T, y_{T-1}, \cdots, y_1)\big) &= \sum_{t=1}^{T}\log\big(\Phi(y_t - y_{t|t-1},\ F_{t|t-1})\big) \\ &= -\frac{Tg}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log|F_{t|t-1}| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(y_t - y_{t|t-1})'F_{t|t-1}^{-1}(y_t - y_{t|t-1}) \end{aligned} \tag{27}$$

Z_t, d_t, S_t, H_t, T_t, c_t, R_t, Q_t が未知パラメータ θ に依存しているとき， (27) 式の尤度関数が θ について最大化される。明示的に θ の推定値が得られることは稀なので，単純サーチ法 (simple grid search), スコアリング法 (scoring method) 等の方法で尤度関数が最大化されることが多い。最尤法で求められた未知パラメータの推定値を所与として，それぞれのアルゴリズムに代入し状態変数の推定値が求められるのである。この最大化方法の際には，収束計算が用いられる。すなわち，最初に適当な値を未知パラメータに与えておいて， (12) 式 ～ (18) 式のアルゴリズムから尤度関数の値を求める。

[22]撹乱項に相関がある場合のフィルタリング・アルゴリズムについては，Burridge and Wallis (1988), Harvey (1989) を参照せよ。

次に，得られたプレディクション，フィルタリング推定値 $a_{t|t}$, $\Sigma_{t|t}$, $a_{t|t-1}$, $\Sigma_{t|t-1}$ を与えたもとで，尤度関数を最大にする未知パラメータの推定値を求める。この過程が繰り返され，未知パラメータの推定値の値が安定するまで続けられる。

このイノヴェーション・フォームを利用した最尤法によると，最大化に必要な $y_{t|t-1}$, $F_{t|t-1}$ は (12) ∼ (18) のカルマン・フィルタ・アルゴリズムの中で計算される。そこでは余分な計算を必要としない。このように考え方の単純明解さから， (27) 式が最尤法に広く利用されるのである。

次節以降の推定では取り上げないが，このイノヴェーション・フォームの尤度最大化の他に，別の方法で尤度関数を最大化する方法もある。この方法をここに簡単に紹介する。この最大化の方法は EM アルゴリズムと呼ばれ，すべてのデータ $\Omega_T = \{y_1,\ y_2, \cdots, y_T\}$ を与えたもとで，対数尤度関数の期待値が最大にされる方法である (EM アルゴリズムについて，補論 3 参照)。観測されない状態変数 α_t, $t = 1, 2, \cdots, T$, は，すべての情報 Ω_T を与えたもとでの条件付き期待値 (すなわち， $a_{t|T}$, $\Sigma_{t|T}$) に置き換えられる。このように， EM アルゴリズムは対数尤度関数の最大化にスムージング推定値を必要とする。そのため，イノヴェーション・フォームを用いる方法よりも，余分の計算 (すなわち， (20) ∼ (22) のスムージング・アルゴリズム) をしなければならない。(4), (5) で表される可変パラメータ・モデルにおいて， σ^2, R を推定するのに EM アルゴリズムは有効である。先に述べたように，イノヴェーション・フォームの尤度最大化によると未知パラメータの解は明示的には得られず，単純サーチ法等によって行われるが，この EM アルゴリズムでは σ^2, R の推定値はスムージング推定値の関数として明示的に得られる。収束計算によって σ^2, R は推定される。この方法は真のパラメータの近傍をすばやく探し出すことができるが，収束は非常に遅いという欠点を持つ。Shumway and Stoffer (1982), Watson and Engle (1983), Tanizaki (1989) は状態空間モデルに EM アルゴリズムを応用した。また一般的な EM アルゴリズムの文献としては，Dempster, Laird and Rubin (1977), Rund (1991) があげられる。

以上，本節では，状態空間モデルの定義 (1.1 節), 経済学への応用例 (1.2 節), 状態変数の推定問題 (1.3 節), フィルタリング・アルゴリズムの導出 (1.4 節), 加えて，未知パラメータの推定 (1.5 節) について解説した。プレディクション, フィルタリング, スムージングの具体的な計算手順については次節で述べる。状態空間モデルを適用する場合に問題となるのは，初期値 (a_0, Σ_0) の扱いと未知パラメータ (θ) の推定である。フィルタリング・アルゴリズムについては，未知パラメータが状態空間モデルの中に含まれていないとき，初期値が与えられるとそれ以降のすべての期の状態変数が計算されるアルゴリズムになっている。また，未知パラメータの推定については， θ の推定値を明示的な形で得ることが難しく，ほとんどの場合は不可能である。したがって， (26) 式を最大化するには単純サーチ法等の方法に頼らざるをえない。未知パラメータの数が増えるとこの方法も難しくなる。また，スコアリング法も尤度関数を最大にするのに使われるが，この方法は尤度関数の 1 階微分を必要とするので，時には複雑になる。例えば， (4) 式と (4) 式の可変パラメータ・モデルでは， σ^2 と R が未知パラメータになるので， R が正値定符号行列であるという条件を加えながら，単純サーチ法やスコアリング法を行うことはほとんど不可能といってもいい。この場合 R に何らかの条件を新たに加える必要があるだろう。

2 可変パラメータ・モデルによる分析 — 消費関数の推定 —

消費支出は国民総生産の約 6 割を占め，研究の対象とされ易くこれまで様々な文献が発表されてきたこの発端となったのが，言うまでもなく，1936 年の Keynes (1936) であった。その後，統計的情報の発達によって,「景気循環の過程や任意の時点における各家計について消費と所得の比率は所得水準の変化と負の相関を持つが，長期間については所得が上昇するにつれてこの比率の低下傾向は見られない」という興味深い事実が明らかになった。この事実を説明しようとする試みが Duesenberry (1949), Modigliani and Brumberg (1954), Friedman (1957) によってなされ，それぞれは相対所得仮説 (relative income hypothesis), ライフ・サイクル仮説 (life cycle hypothesis), 恒常所得仮説 (permanent income hypothesis) として知られている。その他にも，Sidrauski (1967), Hall (1978), Stockman (1981) 等数多くの文献が見つけられる。

本節では，絶対所得仮説といわれる Keynes 型消費関数 (可処分所得のみによって消費を説明する)，日米について推定する。

2.1 消費関数 I

ケインズ型消費関数または長期の消費関数を推定する。推定方法は最小自乗法 (OLS), コクラン=オーカット法 (C-O)[23], カルマン・フィルタリング推定量とスムージング推定量 (K-Filter) である[24]。

まずは，日本の消費関数から推定する。

2.1.1 日本の消費関数： $C_t = f\Big(Yd_t\Big)$

日本の貯蓄率は世界的にも高いと言われているが，国民経済計算年報によると 1976 年以降低下傾向にある。この事実を可変パラメータ・モデルを使って，限界消費性向を推定し，調べる[25]。

OLS
$$C_t = \underset{(1186.2)}{-\ 1586.0} + \underset{(0.00691)}{0.83863}\,Yd_t$$
$$R^2 = 0.9917,\quad se = 5092.9,\quad DW = 0.290,\quad \log L = -1233.4$$
推定期間：1960.1 ∼ 1990.4

C-O
$$C_t = \underset{(756905865)}{18527442} + \underset{(0.03241)}{0.18560}\,Yd_t$$
$$\rho = 0.9999,\quad se = 1319.7,\quad DW = 2.015$$
推定期間：1960.2 ∼ 1990.4

K-Filter
初期値：$\beta_{0|0} = \begin{pmatrix} 2241.8 \\ 0.81930 \end{pmatrix}$

$$\Sigma_{0|0} = \begin{pmatrix} 21634000000 & -116350 \\ -116350 & 0.73505 \end{pmatrix}$$

$$se = 1108.5,\quad R = \begin{pmatrix} 843710 & -13.409 \\ -13.409 & 0.00022634 \end{pmatrix}$$

$\log L = -1108.8\ (-1220.8)$

推定期間：1960.1 ∼ 1990.4

---

[23]実際には，コクラン=オーカット法を採用していない。しかし，撹乱項に 1 階の自己相関がある場合の推定には，コクラン=オーカット法が最も有名であるので，この呼び名を用いた。

MicroTSP Ver.7.0 を用いて推定を行い，その推定方法は Rao and Griliches(1969) に基づき，次の通りである。回帰モデルを

$$y_t = x_t\beta + \epsilon_t$$
$$\epsilon_t = \rho\epsilon_{t-1} + e_t$$

として，撹乱項 e_t, $t = 2,\cdots,T$, は独立で同じ分布をすると仮定する。ϵ_t を消去すると，次の非線形モデル

$$y_t = \rho y_{t-1} + x_t\beta - x_{t-1}\rho\beta + e_t$$

として書き直される。MicroTSP はこの非線形モデルの ρ と β を推定する。この場合，ρ の推定値が 1 を超えることもあり得ることに注意せよ。

[24]各推定結果の記号について，記しておく。

OLS と C-O について，各係数の下の括弧はその係数の推定値の標準誤差を示す。R^2, se, DW, $\log L$ は自由度修正済み決定係数, 撹乱項の標準誤差, ダービン=ワトソン比, 撹乱項に正規分布を仮定した場合の尤度関数の推定値をそれぞれ表す。

C-O について，ρ は 1 階の自己相関の推定値を表す。

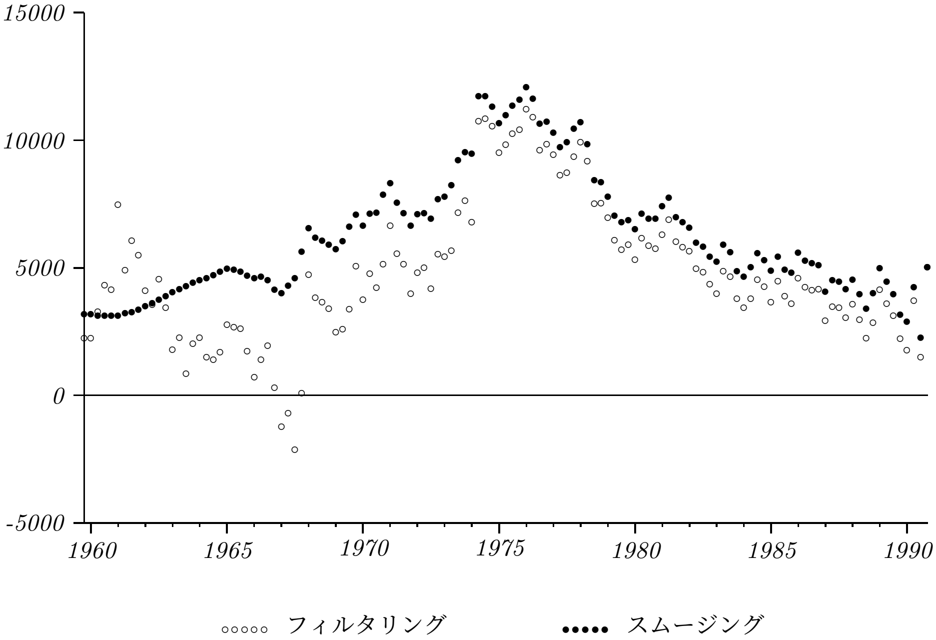
K-Filter に関して，$\beta_{0|0}$, $\Sigma_{0|0}$ は状態変数の初期値とその分散の値を示す。R は η_t の分散の推定値を表し，パラメータの変動が激しければ R の各要素の値は大きくなる。さらに，$\log L$ は最初の k 個のデータを除いて計算されたイノヴェーション・フォームの尤度関数の推定値の値であり，右隣の括弧の値は $R = 0$, $\beta_{0|0}$ と σ_η には OLS で得られた推定値を代入して同じく最初の k 個のデータを無視して得られた尤度関数 (すなわち，これは全部のデータを用いて OLS で推定し，最初の k 個のデータを除いて算出された尤度関数の値に等しい) である。時間に関する各パラメータの変動については，フィルタリングとスムージングのプロットを共に同じグラフに示しておく。実際に推定を行うと，スムージングに比べて，フィルタリングは初期値に近いほど変動は激しくなることがわかる。以降，パラメータの推移等の分析にはスムージング推定値を使う。フィルタリング推定値は参考程度に載せておく。

[25]関数 $f(\cdot)$ は，定数項を含む線形関数であるということを表すのもとする。すなわち，

$$f(x) = \alpha + \beta x$$
$$f(x,y) = \alpha + \beta x + \gamma y$$
$$\vdots$$

のように表される。ただし，α, β, γ は推定されるべきパラメータを表す。

図 1.1.1 日本の消費関数 − 定数項 α の変動 −
関数形：$C = \alpha + \beta Yd$



定数項は基礎消費，Yd の係数は限界消費性向として知られている。図 1.1.1 は定数項の変動，図 1.1.2 は可処分所得 Yd の係数の変動を表す。多くの研究で消費関数はかなり安定的であるという結果が得られているが，可変パラメータ・モデルにおいても，図 1.1.2 の限界消費性向では 0.8 前後のかなり安定的な結果がでている。しかし，限界消費性向の値が第一次オイル・ショック (1973.4) の影響を受けて 1974 年から 1976 年あたりの期間に 0.7 位まで低下しているが，この事実は従来から知られている通りである (例えば，豊田 (1978) を参照せよ)。また，1975 年 ∼ 1976 年以降，限界消費性向は上昇傾向 (すなわち，逆に限界貯蓄性向は減少傾向) にあるという事実も認められる。さらに，限界消費性向は実質利子率, 年齢, 嗜好に依存すると考えられ，様々な角度からこの事実を実証しようという試みがなされてきた (豊田 (1978), Ban (1982) 等)。ここでは，限界消費性向のスムージング推定値 $\beta_{t|T}$ を実質利子率 $(r_t - p_t)$ に回帰させて，限界消費性向が実質利子率に依存するかどうかを調べる。この場合，実質利子率の係数は消費の異時点間の代替効果が所得効果を上回れば負，所得効果が代替効果を上回れば正となる。

OLS
$$\beta_{t|T} = \underset{(0.0041)}{0.7729} + \underset{(0.000772)}{0.003555}\,(r_t - p_t)$$
$$R^2 = 0.1421,\quad se = 0.0359,\quad DW = 0.212,\quad \log L = 235.8$$
推定期間：1960.2 ∼ 1990.4

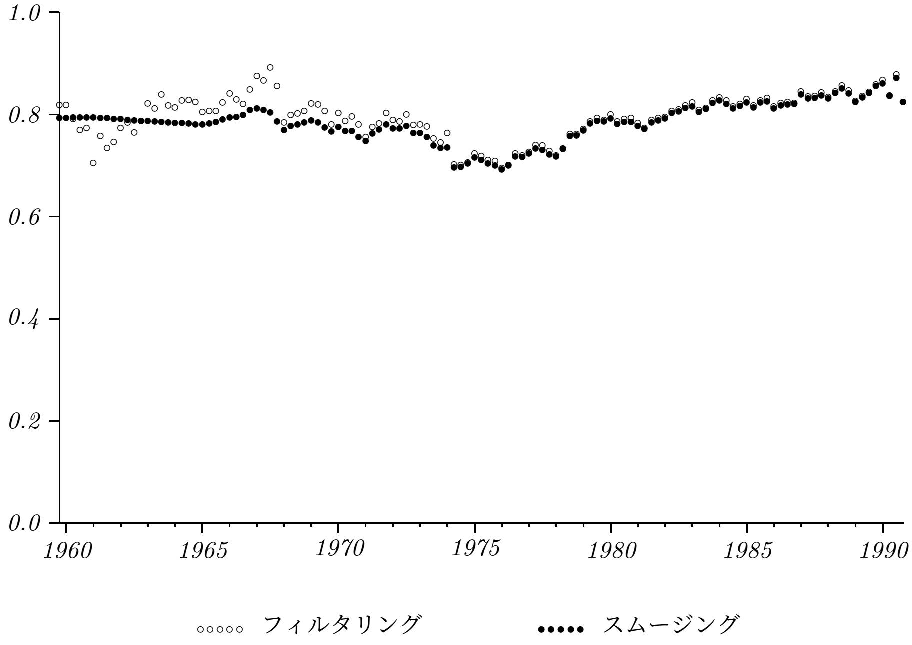
C-O
$$\beta_{t|T} = \underset{(0.0270)}{0.7907} + \underset{(0.000225)}{0.000457}\,(r_t - p_t)$$
$$\rho = 0.9685,\quad se = 0.0102,\quad DW = 1.986$$
推定期間：1960.3 ∼ 1990.4

推定結果から，実質利子率は限界消費性向に統計的に有意に影響を及ぼしているのは明かである。また，実質利子率の係数の符号が正であることから，消費の異時点間の所得効果は代替効果を上回っていると結論できる。定数項は限界消費性向の実質利子率に影響されない部分を示す。OLS の結果では決定係数がかなり低い値となっているが，これは限界消費性向の変動を説明するのに実質利子率だけではなくそれ以外の他の要因[26]にも依存するためであると考えられる。

次に，米国の消費関数を推定する。同様に，ケインズ型消費関数の定式化を行う。

[26]限界消費性向の変動を説明する要因としては，斎藤・大鹿 (1979) によると，失業率, 有効求人倍率等をあげている。

図 1.1.2 日本の消費関数 － Yd の係数 β の変動 －
関数形：$C = \alpha + \beta Yd$



2.1.2 米国の消費関数： $C_t^* = f\Big(Yd_t^*\Big)$

米国のデータを用い，OLS, C-O, K-Filter によって，前節で行ったのと同じ推定期間で，ケインズ型消費関数を推定する。さらに，スムージングによって推定された限界消費性向の値を実質利子率に回帰させて，米国の限界消費性向が実質利子率に依存するかどうかを調べる。

OLS
$$C_t^* = -\underset{(11.380)}{61.441} + \underset{(0.00506)}{0.93896}\, Yd_t^*$$
$$R^2 = 0.9964,\quad se = 33.487,\quad DW = 0.339,\quad \log L = -610.32$$
推定期間：1960.1 ∼ 1990.4

C-O
$$C_t^* = -\underset{(2929.3)}{1685.8} + \underset{(0.05596)}{0.29145}\, Yd_t^*$$
$$\rho = 1.0034,\quad se = 13.534,\quad DW = 2.149$$
推定期間：1960.2 ∼ 1990.4

K-Filter
初期値：$\beta_{0|0} = \begin{pmatrix} 38.798 \\ 0.89934 \end{pmatrix}$

$$\Sigma_{0|0} = \begin{pmatrix} 1991300 & -853.41 \\ -853.41 & 0.39320 \end{pmatrix}$$

$$se = 5.3472,\quad R = \begin{pmatrix} 400.82 & -0.3264 \\ -0.3264 & 0.00026885 \end{pmatrix}$$

$\log L = -512.44\ (-607.75)$
推定期間：1960.1 ∼ 1990.4

図 1.2.2 によると，限界消費性向はある程度の上下の変動はあるが一貫して長期的には上昇傾向にあるようである。最近では 0.9 程度で推移している。対して，定数項 (図 2.1.1) は逆に下降傾向を示している。限界消費性向が実質利子率

図 1.2.1 米国の消費関数 － 定数項 α^* の変動 －
関数形：$C^* = \alpha^* + \beta^* Yd^*$

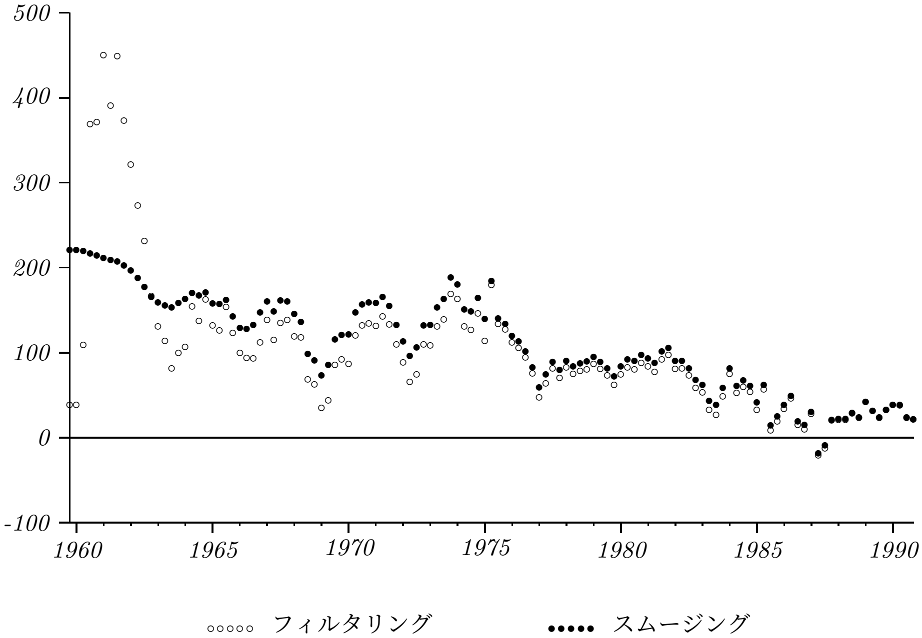
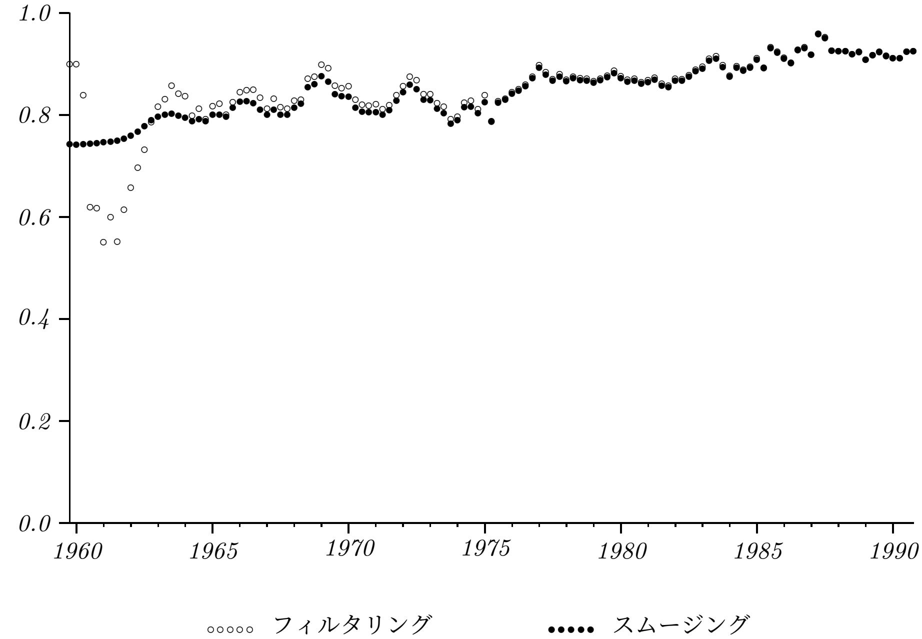


図 1.2.2 米国の消費関数 － Yd^* の係数 β^* の変動 －
関数形：$C^* = \alpha^* + \beta^* Yd^*$



に依存するかどうかを調べるため，限界消費性向 $\beta^*_{t|T}$ を実質利子率 $(r^*_t - p^*_t)$ に回帰する。

OLS $\quad \underset{}{\beta^*_{t|T}} = \underset{(0.0053)}{0.8269} + \underset{(0.001301)}{0.008349}\,(r^*_t - p^*_t)$

$R^2 = 0.2479,\quad se = 0.0455,\quad DW = 0.220,\quad \log L = 206.7$

推定期間：1960.2 ∼ 1990.4

C-O $\quad \beta^*_{t|T} = \underset{(0.0380)}{0.8866} - \underset{(0.000591)}{0.000019}\,(r^*_t - p^*_t)$

$\rho = 0.9617,\quad se = 0.0128,\quad DW = 2.100$

推定期間：1960.3 ∼ 1990.4

OLS の結果をみる限りでは，実質利子率の係数の統計的有意性と決定係数の値から判断して，実質利子率が限界消費性向に与える影響は日本の場合よりも大きいといえるだろう。しかし，C-O の結果をみると，係数の有意性は低く，実質利子率は限界消費性向に影響を与えないとすることもできる。

本節では，最も単純な定式化によって，消費関数を日米両国について推定した。限界消費性向の推移は両国において多少異なるが，ほぼ安定的な値を示した。日本では，オイル・ショック期に限界消費性向は下落し，その後徐々に上昇傾向を辿っている。米国の限界消費性向は一貫して上昇傾向にある。OLS の結果から，日本の限界消費性向は 0.83863 で，その中で実質利子率を除いた部分は 0.7729 となっているのに対し[27]，米国の場合は限界消費性向が 0.93896 と日本の場合より高く，また実質利子率を除いた部分は 0.8269 となっている。それらの値の差，すなわち，$0.93896 - 0.8269 > 0.83863 - 0.7729$ という結果から，米国の方が，限界消費性向の中で実質利子率に依存する部分は大きいということが言えるだろう[28]。

補論 1： 可変パラメータ・モデルの種類

可変パラメータ・モデルには大きく分けて次の 3 つの種類がある。

- **Systematically Varying Parameter Model**
  - **決定論的定式化 (deterministic formulation)：**

$$y_t = x_t\beta_t + u_t$$
$$\beta_t = z_t\alpha$$

のモデルで，α を推定する。α を推定することによって，β_t を推定することができる。実際に推定する場合は，β_t をモデルから消去して，

$$y_t = x_t z_t\alpha + u_t$$

を推定することになる。ただし，u_t は撹乱項である。このようなモデルは，Belsley (1973) によって議論されている。

  - **確率的定式化 (stochastic formulation)：**

$$y_t = x_t\beta_t + u_t$$
$$\beta_t = z_t\alpha + v_t$$

のモデルで，α を推定する。ただし，u_t, v_t は撹乱項である。決定論的定式化では，パラメータ β_t は何らかの外生変数に依存するが非確率的と仮定する。一方，この確率的定式化によると，パラメータは他の外生変数に依存し，しかも確率変数と仮定される。

- **Switching Regression Model**

[27] これは，日本の限界消費性向のスムージング推定値 $\beta_{t|T}$ に実質利子率 $(r - p)$ を回帰させたときの推定結果である。前節を参照せよ。

[28] 日本の場合，金利の自由化は 1970 年代後半以降のことであり，このため金利変数があまり限界消費性向に影響しなかったと考えることも可能である。

– **ダミー変数 (dummy variable) :**
広く用いられているように，ダミー変数によって，構造変化を表現しようというものである。徐々に経済構造 (gradual shift) が変わるというのではなく，突然の変化 (discrete jump) を対象にしている。

– **Piecewise Regression Model:**
Quandt (1958) は以下のモデルを提示した。

$$y_t = \begin{cases} x_t\beta_1 + u_{1t}, t = 1, \cdots, s \\ x_t\beta_2 + u_{2t}, t = s+1, \cdots, T \end{cases}$$

β_1, β_2 は推定されるべきパラメータであり，u_{1t}, u_{2t} は攪乱項である。s 期以前と $(s+1)$ 期以降とで突然の経済構造の変化があると想定したモデルである。時点 s が未知のモデルも考えられている。

- **Time-varying Parameter Model**

– **クーリー・プレスコット・モデル (Cooley-Prescott model) :**
Cooley and Prescott (1973, 1976) は，パラメータが確率的に動くモデルを考案した。

$$y_t = x_t\beta_t, \qquad\qquad t = 1, \cdots, T$$

そして，パラメータ β_t の変動は，恒常的な部分 β_t^p と一時的な部分 u_t に分けられるとした。さらに，恒常的な部分は前期のそれに依存するとし，自己回帰モデルとして仮定した。すなわち， β_t の動きは

$$\beta_t = \beta_t^p + u_t$$
$$\beta_t^p = \beta_{t-1}^p + v_t$$

によって，書き表される。このモデルは， β_t を消去して，次の状態空間モデルに書き換えられる。

(観測方程式) $\qquad y_t = x_t\beta_t^p + x_t u_t$

(遷移方程式) $\qquad \beta_t^p = \beta_{t-1}^p + v_t$

これは，本稿で紹介するカルマン・フィルタ・モデルに一致する。

– **カルマン・フィルタ・モデル:**
パラメータの動きは，AR(1) モデルと仮定され，確率的に変動する。アルゴリズムは複雑になるが，遷移方程式を AR (p) モデルに従うとすることも可能である。

可変パラメータ・モデルについて詳しくは，Belsley and Kuh (1973), Judge, Griffiths, Hill and Lee (1980), Judge, Griffiths, Hill, Lutkepohl and Lee (1984), 刈谷 (1985) 等を参照せよ。

補論 2： 1.4.1 節での計算 (証明1, 2)

まず初めに，準備として，いくつかの定理を紹介しておく。

定理 1 (行列の逆転公式) : A, C をそれぞれ $n \times n$, $m \times m$ の非特異行列， B を $n \times m$ の行列とする。このとき，

$$(A + BCB')^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + B'A^{-1}B)^{-1}B'A^{-1}$$

が成立する。

定理 2: A, B, D をそれぞれ $k \times k$, $k \times g$, $g \times g$ の行列とする。ただし， A, D は非特異行列である。このとき次の関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{pmatrix}$$

X, Y, Z は次に与えられる。

$$
\begin{aligned}
X &= (A - BD^{-1}B')^{-1} \\
&= A^{-1} + A^{-1}B(D - B'A^{-1}B)^{-1}B'A^{-1} \\
Y &= -(A - BD^{-1}B')^{-1}BD^{-1} \\
&= -A^{-1}B(D - B'A^{-1}B)^{-1} \\
Z &= (D - B'A^{-1}B)^{-1} \\
&= D^{-1} + D^{-1}B'(A - BD^{-1}B')^{-1}BD^{-1}
\end{aligned}
$$

X, Z の 2 つ目の等式には，定理 1 の行列の逆転公式が使われている。

定理 3: y, x はそれぞれ $k \times 1$, $g \times 1$ の確率変数ベクトルとする。それらは以下の 2 変数正規分布に従うとする。

$$
\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{pmatrix} \right)
$$

これは x と y の結合分布 $P(x,\ y)$ である。このとき， x を与えたもとでの y の条件付き分布 $P(y|x)$ は，平均 $\mu_y + \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}(x - \mu_x)$, 分散 $\Sigma_{yy} - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy}$ の正規分布となる。さらに， x の周辺分布 $P(x)$ は，平均 μ_x, 分散 Σ_{xx} の正規分布に従う。すなわち，以上をまとめると，

$$
\begin{aligned}
&P(y|x) = \Phi\big(y - \mu_y - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}(x - \mu_x),\ \Sigma_{yy} - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy}\big) \\
&P(x) = \Phi(x - \mu,\ \Sigma_{xx})
\end{aligned}
$$

となる。$P(x,\ y) = P(y|x)P(x)$ となることに注意せよ。

定理 4: 定理 3 に関連して，次の行列式に関する定理をあげておく。

$$
\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D|\ |A - BD^{-1}C|
$$

定理 3 の例においては，

$$
\begin{vmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{vmatrix} = |\Sigma_{xx}|\ |\Sigma_{yy} - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy}|
$$

が成り立つことに注意せよ。

以上の公式を用いて，1.4.1 節での導出方法 (証明 1, 2) を以下に示す。

証明 1: 次式が成り立つことを証明する。

$$
\begin{aligned}
&\int \Phi(\alpha_t - T_t\alpha_{t-1} - c_t,\ R_tQ_tR_t')\ \Phi(\alpha_{t-1} - a_{t-1|t-1},\ \Sigma_{t-1|t-1})\mathrm{d}\alpha_{t-1} \\
&= \Phi(\alpha_t - T_ta_{t-1|t-1} - c_t,\ T_t\Sigma_{t-1|1-1}T_t' + R_tQ_tR_t')
\end{aligned}
$$

まず記号を簡略化するために，

$$
\begin{aligned}
&x = \alpha_{t-1} - a_{t-1|t-1} \\
&\Sigma_{xx} = \Sigma_{t-1|t-1} \\
&y = \alpha_t - T_ta_{t-1|t-1} - c_t \\
&\Sigma_{yy} = R_tQ_tR_t' \\
&A = T_t
\end{aligned}
$$

とそれぞれ再定義する。そして，それぞれ代入して，

$$\int \Phi(y-Ax,\ \Sigma_{yy})\ \Phi(x,\ \Sigma_{xx})\mathrm{d}x = \Phi(y,\ A\Sigma_{xx}A'+\Sigma_{yy})$$

を証明する。

初めに，2 つの正規分布を記しておく。

$$\Phi(y-Ax,\ \Sigma_{yy}) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}}|\Sigma_{yy}|^{-\frac{1}{2}}\exp\bigl(-\frac{1}{2}(y-Ax)'\Sigma_{yy}^{-1}(y-Ax)\bigr)$$
$$\Phi(x,\ \Sigma_{xx}) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}}|\Sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}}\exp\bigl(-\frac{1}{2}x'\Sigma_{xx}^{-1}x\bigr)$$

この 2 つの正規分布の積は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
&\Phi(y-Ax,\ \Sigma_{yy})\ \Phi(x,\ \Sigma_{xx})\\
&= (2\pi)^{-\frac{g}{2}}|\Sigma_{yy}|^{-\frac{1}{2}}\exp\bigl(-\frac{1}{2}(y-Ax)'\Sigma_{yy}^{-1}(y-Ax)\bigr)\ (2\pi)^{-\frac{k}{2}}|\Sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}}\exp\bigl(-\frac{1}{2}x'\Sigma_{xx}^{-1}x\bigr)\\
&= (2\pi)^{-(g+k)/2}|\Sigma_{yy}|^{-\frac{1}{2}}\ |\Sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} y-Ax \\ x\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\Sigma_{yy} & 0 \\ 0 & \Sigma_{xx}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y-Ax \\ x\end{pmatrix}\right)\\
&= (2\pi)^{-(g+k)/2}|\Sigma_{yy}|^{-\frac{1}{2}}\ |\Sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} y \\ x\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} I_g & -A \\ 0 & I_k\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\Sigma_{yy} & 0 \\ 0 & \Sigma_{xx}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I_g & -A \\ 0 & I_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ x\end{pmatrix}\right)\\
&= (2\pi)^{-(g+k)/2}|\Sigma_{yy}|^{-\frac{1}{2}}\ |\Sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} y \\ x\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} I_g & A \\ 0 & I_k\end{pmatrix}'^{-1}\begin{pmatrix}\Sigma_{yy} & 0 \\ 0 & \Sigma_{xx}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I_g & A \\ 0 & I_k\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y \\ x\end{pmatrix}\right)\\
&= (2\pi)^{-(g+k)/2}|\Sigma_{yy}|^{-\frac{1}{2}}\ |\Sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} y \\ x\end{pmatrix}'\left(\begin{pmatrix} I_g & A \\ 0 & I_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Sigma_{yy} & 0 \\ 0 & \Sigma_{xx}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_g & A \\ 0 & I_k\end{pmatrix}'\right)^{-1}\begin{pmatrix} y \\ x\end{pmatrix}\right)\\
&= (2\pi)^{-(g+k)/2}|\Sigma_{yy}|^{-\frac{1}{2}}\ |\Sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} y \\ x\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} A\Sigma_{xx}A'+\Sigma_{yy} & A\Sigma_{xx} \\ \Sigma_{xx}A' & \Sigma_{xx}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y \\ x\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

上の計算の過程に，以下の逆行列

$$\begin{pmatrix} I_g & -A \\ 0 & I_k\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_g & A \\ 0 & I_k\end{pmatrix}$$

が使われている。

さらに，定理 4 を使うと，

$$\begin{vmatrix} A\Sigma_{xx}A'+\Sigma_{yy} & A\Sigma_{xx} \\ \Sigma_{xx}A' & \Sigma_{xx}\end{vmatrix} = |\Sigma_{xx}|\ |\Sigma_{yy}|$$

であることがわかる。

よって， x と y の結合分布は以下のような 2 変数正規分布であることを意味する。

$$\begin{pmatrix} y \\ x\end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A\Sigma_{xx}A'+\Sigma_{yy} & A\Sigma_{xx} \\ \Sigma_{xx}A' & \Sigma_{xx}\end{pmatrix}\right) \tag{28}$$

y の周辺分布は，定理 3 より，

$$P(y) = \Phi(y,\ A\Sigma_{xx}A'+\Sigma_{yy})$$

となる。

変数を元に戻して，

$$P(\alpha_t|\Omega_{t-1}) = \Phi(\alpha_t - T_t a_{t-1|t-1} - c_t,\ T_t\Sigma_{t-1|1-1}T_t' + R_tQ_tR_t')$$

を得る。

証明 2: 次式が成り立つことを証明する。

$$\begin{aligned} &\Phi(y_t - Z_t\alpha_t - d_t,\ S_tH_tS_t')\ \Phi(\alpha_t - a_{t|t-1},\ \Sigma_{t|t-1}) \\ &= \Phi\big(\alpha_t - a_{t|t-1} - k_t(y_t - y_{t|t-1}),\ \Sigma_{t|t-1} - k_tF_{t|t-1}k_t'\big)\ \Phi(y_t - y_{t|t-1},\ F_{t|t-1}) \end{aligned}$$

証明 1 で行ったのと同様に，以下のように変数を再定義する。

$$\begin{aligned} &x = \alpha_t - a_{t|t-1} \\ &\Sigma_{xx} = \Sigma_{t|t-1} \\ &y = y_t - Z_ta_{t|t-1} - d_t \\ &\Sigma_{yy} = S_tH_tS_t' \\ &A = Z_t \end{aligned}$$

次の 3 つの式

$$\begin{aligned} &y_{t|t-1} = Z_ta_{t|t-1} + d_t \\ &F_{t|t-1} = Z_t\Sigma_{t|t-1}Z_t' + S_tH_tS_t' \\ &k_t = \Sigma_{t|t-1}Z_t'F_{t|t-1}^{-1} \end{aligned}$$

に注意すると上の証明すべき等式は,

$$\begin{aligned} &\Phi(y - Ax,\ \Sigma_{yy})\ \Phi(x,\ \Sigma_{xx}) \\ &= \Phi\big(x - \Sigma_{xx}A'(A\Sigma_{xx}A' + \Sigma_{yy})^{-1}y,\ \Sigma_{xx} - \Sigma_{xx}A'(A\Sigma_{xx}A' + \Sigma_{yy})^{-1}A\Sigma_{xx}\big)\ \Phi(y,\ A\Sigma_{xx}A' + \Sigma_{yy}) \end{aligned}$$

として書き換えられる。この等式が成り立つことを証明すればよいが，再定義された変数を証明 1 と同じように定義したので，証明 1 でとられた途中の式はすべて有効である。よって， x と y の結合分布 $P(x,\ y)$ は (28) と同じ 2 変数正規分布となる。定理 3 を用いて， x の条件付き分布 $P(x|y)$ と y の周辺分布 $P(y)$ を求めると,

$$\begin{aligned} &P(x,\ y) \\ &= P(x|y)\ P(y) \\ &= \Phi\big(x - \Sigma_{xx}A'(A\Sigma_{xx}A' + \Sigma_{yy})^{-1}y,\ \Sigma_{xx} - \Sigma_{xx}A'(A\Sigma_{xx}A' + \Sigma_{yy})^{-1}A\Sigma_{xx}\big)\ \Phi(y,\ A\Sigma_{xx}A' + \Sigma_{yy}) \end{aligned}$$

が得られる。ただし,

$$\begin{aligned} &P(x|y) = \Phi\big(x - \Sigma_{xx}A'(A\Sigma_{xx}A' + \Sigma_{yy})^{-1}y,\ \Sigma_{xx} - \Sigma_{xx}A'(A\Sigma_{xx}A' + \Sigma_{yy})^{-1}A\Sigma_{xx}\big) \\ &P(y) = \Phi(y,\ A\Sigma_{xx}A' + \Sigma_{yy}) \end{aligned}$$

であることに注意せよ。さらに，変数を元に戻して,

$$\begin{aligned} &\Phi(y_t - Z_t\alpha_t - d_t,\ S_tH_tS_t')\ \Phi(\alpha_t - a_{t|t-1},\ \Sigma_{t|t-1}) \\ &= \Phi\big(\alpha_t - a_{t|t-1} - k_t(y_t - y_{t|t-1}),\ \Sigma_{t|t-1} - k_tF_{t|t-1}k_t'\big)\ \Phi(y_t - y_{t|t-1},\ F_{t|t-1}) \end{aligned}$$

が成り立つことが示される。

補論 3： EM アルゴリズム

以下の単純な状態空間モデルを使って， EM アルゴリズムについて簡単に述べる。

(観測方程式)　$y_t = Z_t\alpha_t + \epsilon_t$

(遷移方程式)　$\alpha_t = \Psi\alpha_{t-1} + \eta_t$

$$\begin{pmatrix}\epsilon_t\\ \eta_t\end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}H & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}\right), \qquad t = 1,\cdots,T$$
$$\alpha_0 \sim N(a_0, \Sigma_0)$$

仮定 (3) のもとで (1) 式, (2) 式で表されるモデルとの対応は $d_t = 0$, $S_t = I_g$, $H_t = H$, $T_t = \Psi$, $c_t = 0$, $R_t = I_k$, $Q_t = Q$ となっている。ただし， I_g, I_k は $g\times g$, $k\times k$ の単位行列である。各行列の次元は (1) $\sim$ (3) で用いられたものと同じものである。推定されるべき未知パラメータ θ はこの場合， H, Q, Ψ である。

$y_1,\cdots,y_T,\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_T$ の結合分布の対数を取った対数尤度関数は

$$\begin{aligned}\log\bigl(P(y_1,\cdots,y_T,\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_T)\bigr) = &-\frac{Tg}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log|H| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(y_t - Z_t\alpha_t)'H^{-1}(y_t - Z_t\alpha_t)\\ &-\frac{Tk}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log|Q| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\alpha_t - \Psi\alpha_{t-1})'Q^{-1}(\alpha_t - \Psi\alpha_{t-1})\\ &-\frac{k}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log|\Sigma_0| - \frac{1}{2}(\alpha_0 - a_0)'\Sigma_0^{-1}(\alpha_0 - a_0)\end{aligned}$$

として表される。

この尤度関数に Ω_T を与えたもとで条件付き期待値を取ると，

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\Bigl(\log\bigl(P(y_1,\cdots,y_T,\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_T)\bigr)|\Omega_T\Bigr)\\ &= -\frac{Tg}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log|H| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{tr}\Bigl(H^{-1}\bigl((y_t - Z_t a_{t|T})(y_t - Z_t a_{t|T})' + Z_t\Sigma_{t|T}Z_t'\bigr)\Bigr)\\ &\quad -\frac{Tk}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log|Q| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{tr}\Bigl(Q^{-1}\bigl((a_{t|T} - \Psi a_{t-1|T})(a_{t|T} - \Psi a_{t-1|T})'\\ &\qquad\qquad + \Sigma_{t|T} - \Psi\Sigma_{t,t-1|T}' - \Sigma_{t,t-1|T}\Psi' + \Psi\Sigma_{t-1|T}\Psi'\bigr)\Bigr)\\ &\quad -\frac{k}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log|\Sigma_0| - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Bigl(\Sigma_0^{-1}\bigl((a_{0|T} - a_0)(a_{0|T} - a_0)' + \Sigma_{0|T}\bigr)\Bigr)\end{aligned} \tag{29}$$

となる。 tr はトレースを表す。 $\Sigma_{t,t-1|T}$ は $\Sigma_{t,t-1|T} = \mathrm{E}\bigl((\alpha_t - a_{t|T})(\alpha_{t-1} - a_{t-1|T})'|\Omega_T\bigr)$ として定義され，次のように計算される。

$$\Sigma_{t-1,t-2|T} = P_{t-1|t-1}C_{t-2}' + C_{t-1}(\Sigma_{t,t-1|T} - \Psi\Sigma_{t-1|t-1})C_{t-2}', \qquad t = T, T-1,\cdots,2$$

ただし，末端条件は

$$\Sigma_{T,T-1|T} = (I_k - k_T Z_T)\Psi\Sigma_{T-1|T-1}$$

である (Shumway and Stoffer (1982) を見よ)。$a_{t|T}$, $\Sigma_{t|T}$ は (20) 式 $\sim$ (22) 式によって計算されるスムージング推定値である。k_T は (12) 式 $\sim$ (18) 式で計算される T 期のカルマン・ゲインであり， C_t は (20) 式 $\sim$ (22) 式のスムージング・アルゴリズムで求められる。

(29) 式で表される対数尤度関数の期待値が H^{-1}, Q^{-1}, Ψ について最大化される。そして， H, Q, Ψ は次のように定まる。

$$H = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\bigl((y_t - Z_t a_{t|T})(y_t - Z_t a_{t|T})' + Z_t\Sigma_{t|T}Z_t'\bigr)$$

$$Q = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\big((a_{t|T} - \Psi a_{t-1|T})(a_{t|T} - \Psi a_{t-1|T})' + \Sigma_{t|T} - \Psi\Sigma'_{t,t-1|T} - \Sigma_{t,t-1|T}\Psi' + \Psi\Sigma_{t-1|T}\Psi'\big)$$

$$\Psi = \Big(\sum_{t=1}^{T}(\Sigma_{t,t-1|T} + a_{t|T}a'_{t-1|T})\Big)\Big(\sum_{t=1}^{T}(\Sigma_{t-1|T} + a_{t-1|T}a'_{t-1|T})\Big)^{-1}$$

スムージング推定値 $a_{t|T}, \Sigma_{t|T}, \Sigma_{t,t-1|T}$ をもとにして，収束計算によって H, Q, Ψ が求められる。このように EM アルゴリズムによると， H, Q, Ψ はスムージング推定値の関数として明示的に得られる。これに対して，イノヴェーション・フォームを最大化する方法によると EM アルゴリズムのように H, Q, Ψ の推定値を明示的な形で得ることができない。

参考文献

外国語文献

Anderson, B.D.O. and J.B. Moore (1979), *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, New York.

Aoki, M. (1987), *State Space Modeling of Time Series*, Springer-Verlag.

Athans, M. (1974), “ The Importance of Kalman Filtering Methods for Economic Systems, ” *Annals of Economic and Social Measurement*, Vol.3, No.1, pp.49-64.

Ban, K. (1982), “ Estimation of Consumption Function with A Stochastic Income Stream, ” *The Economic Studies Quarterly*, pp.158-p167.

Belsley, D.A. (1973), “ On the determination of Systematic Parameter Variation in the Linear Regression Model, ” *Annals of Economic and Social Measurement*, 2, pp.487-494.

Belsley, D.A. and E. Kuh (1973), “ Time-Varying Parameter Structures: An Overview, ” *Annals of Economic and Social Measurement*, 2, pp.375-379.

Branson, W.H. (1979), *Macroeconomic Theory and Policy* (second edition), Haper & Row, Publishers, Inc.

Brockwell, P.A. and R.A. Davis (1987), *Time Series Theory and Models*, Springer-Verlag.

Burmeister, E. and K.D. Wall (1982), “ Kalman Filtering Estimation of Unobserved Rational Expectations with an Application to the German Hyperinflation, ” *Journal of Econometrics*, Vol.20, pp.255-284.

Burridge, P. and K.F. Wallis (1988), “ Prediction Theory for Autoregressive Moving Average Processes, ” *Econometric Reviews*, 7 (1), pp.65-95.

Campbell, J.Y. (1987), “ Does Saving Anticipate Declining Labor Income? An Alternative Test of the Permanent Income, ” *Econometrica*, Vol.55, No.6, pp.1249-1273.

Campbell, J.Y. and A. Deaton (1989), “ Why is Consumption So Smooth?, ” *Review of Economic Studies*, Vol.56, pp.357-374.

Campbell, J.Y. and N.G. Mankiw (1987), “ Are Output Fluctuations Transitory?, ” *Quarterly Journal of Economics*, pp.857-880.

Campbell, J.Y. and N.G. Mankiw (1990), “ Permanent Income, Current Income, and Consumption, ” *Journal of Business and Economics*, Vol.8, No.3, pp.265-279.

Chow, G.C. (1983), *Econometrics*, McGraw-Hill Book Company.

Conrad, W. and C. Corrado (1979), " Application of the Kalman Filter to Revisions in Monthly Retail Sales Estimates, " *Journal of Economic Dynamic and Control*, Vol.1, pp.177-198.

Cooley, T.F. (1977), " Generalized Least Squares Applied to Time Varying Parameter Models: A Comment, " *Annals of Economic and Social Measurement*, 6/3, pp.313-314.

Cooley, T.F. and E.C. Prescott (1973), " Varying Parameter Regression, A Theory and Some Applications, " *Annals of Economic and Social Measurement*, Vol.2, pp.463-474.

Cooley, T.F. and E.C. Prescott (1976), " Estimation in the presence of stochastic parameter variation, " *Econometrica*, Vol.44, pp.167-183.

Cooper, J.P. (1973), " Time-Varying Regression Coefficients: A Mixed Estimation Approach and Operational Limitations of the General Markov Structure, " *Annals of Economic and Social Measurement*, 2/4, pp.525-530.

Deaton, A. (1987), " Life Cycle Models of Consumption: Is the Evidence Consistent with the Theory?, " in *Advances in Econometrics, Fifth World Congress*, Vol.II, edited by T.F. Bewley. Cambridge: Cambridge University Press, pp.121-146.

Dempster, A.P., N.M. Laird and D.B. Rubin (1977), " Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm, " *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser.B, Vol.39, pp.1-38 (with discussiion) .

Diderrich, G.T. (1985), " The Kalman Filter from the Perspective of Goldberger-Theil Estimators, " *The American Statistician*, Vol.39, pp.193-198.

Diebold, F.X. and M. Nerlove (1989), " Unit Roots in Economic Time Series: A Selective Survey, " in *Advances in Econometrics*, Vol.8, pp.3-69, JAI Press.

Diebold, F.X. and G.D. Rudebusch (1991a), " Is Consumption Too Smooth? Long Memory and the Deaton Paradox, " *The Review of Economics and Statistics*, pp.1-9.

Duesenberry, J.S. (1949), *Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior*, Harvard University Press.

Dziechciarz, J. (1989), " Changing and Random Coefficient Models. A Survey, " in *Statistical Analysis and Forecasting of Economic Structural Change*, edited by P. Hackl, Springer-Verlag.

Flavin, M.A. (1981), " The Adjustment of Consumption to Changing Expectations about Future Income, " *Journal of Political Economy*, Vol.89, No.5, pp.974-1009.

Fomby, T.B., R.C. Hill and S.R. Johnson (1984), *Advanced Econometric Methods*, Springer-Verlag.

Friedman, M. (1957), *A Theory of the Consumption Function*, Princeton University Press.

Garbade, K. (1977), " Two Methods for Examining the Stability of Regression Coefficients, " *Journal of the American Statistical Association*, Vol.72, pp.54-63.

Gardner, G., A.C. Harvey and G.D.A. Phillips (1980), " An Algorithm for Maximum Likelihood Estimation Autoregressive-Moving Average Models by means of Kalman Filtering, " *Applied Statistics*, Vol.29, No.3, pp.311-322.

Gelb, A. (Ed.) (1974), *Applied Optimal Estimation*, MIT Press.

Hall, R.E. (1978), " Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence, " *Journal of Political Economy*, Vol.86, No.6, pp.971-987.

Hall, R.E. (1990), *The Rational Consumer*, The MIT Press.

Hall, R.E. and F.S. Mishkin (1982), " The Sensitivity of Consumption to Transitory Income: Estimates from Panel Data on Households." *Econometrica*, Vol.50, No.2, pp.461-481.

Hannan, E.J. and M. Deistler (1988), *The Statistical Theory of Linear System*, John Wiley & Sons.

Harvey, A.C. (1981), *Time Series Models*, Philip Allen Publishers Limited, Oxford.

Harvey, A.C. (1989), *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press.

Hayashi, F. (1985a), " The Effects of Liquidity Constraints on Consumption: A Cross-sectional Study, " *Quarterly Journal of Economics*, Vol.100, pp.183-206.

Hayashi, F. (1985b), " The Permanent Income Hypothesis and Consumption Durability: Analysis Based on Japanese Panel Data, " *Quarterly Journal of Economics*, Vol.100, pp.1083-1113.

Howrey, E.P. (1978), " The Use of Preliminary Data in Econometric Forecasting, " *The Review of Economics and Statistics*, Vol.60, pp.193-200.

Howrey, E.P. (1984), " Data Revision, Reconstruction, and Prediction: An Application to Inventory Investment, " *The Review of Economics and Statistics*, Vol.66, pp.386-393.

Jazwinski, A.H. (1970), *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York.

Johnston, J. (1972), *Econometric Methods* (second edition), McGraw-Hill Book Company.

Judge, G.G., W.E. Griffiths, R.C. Hill and T. Lee (1980), *The Theory and Practice of Econometrics*, New York, John Wiley & Sons, pp.381-403.

Judge, G.G., W.E. Griffiths, R.C. Hill, H. Lutkepohl and T. Lee (1984), *The Theory and Practice of Econometrics* (second edition), New York, John Wiley & Sons, pp.797-821,pp.980-984.

Kalman, R.E. (1960), " A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, " *Journal of Basic Engineering, Transactions ASME*, Series D, 82, pp.35-45.

Kalman, R.E. and R.S. Bucy (1961), " New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, " *Journal of Basic Engineering, Transactions ASME*, Series D, 83, pp. 95-108.

Keynes, J.M. (1936), *The General Theory of Employment, Interest and Monney*, Macmillan.

Kitagawa, G. (1987), " Non-Gaussian State-Space Modeling of Nonstationary Time Series, " *Journal of the American Statistical Association*, Vol.82, pp.1032-1063 (with discussion) .

Kirchen, A. (1988), *Schäzung zeitveränderlicher Strukturparameter in ökonometrischen Prognosemodellen*, Frankfurt/Main: Athenäum.

Kocherlakota, N.R. (1990), " On the 'Discount' Factor in Growth Economies, " *Journal of Monetary Economics*, Vol.25, pp.43-48.

Laumas, G.S. and Y.P. Mehra (1976), " The Stability of the Demand for Money Function: The Evidence from Quarterly Data, " *The Review of Economics and Statistics*, Vol.58, pp.464-468.

Lucas,R.E. (1976), " Econometric Policy Evaluation: A Critique, " in *The Phillips Curve and Labor Markets*, edited by K.Brunner and A.H.Meltzer, Carnegie-Rochester Conferences on Public Policy 1.

Mankiw, N.G. (1981), " The Permanent Income Hypothesis and The Real Interest Rate, " *Economics Letters*, Vol.7, pp.307-p311.

Mankiw, N.G. and M.D. Shapiro (1985), “ Trends, Random Walks, and Tests of the Permanent Income Hypothesis, ” *Journal of Monetary Economics*, Vol.16, pp.165-174.

Mariano, R.S. and H. Tanizaki (1995) , “ Prediction of Final Data with Use of Preliminary and/or Revised Data ” *Journal of Forecasting*, Vol.14, No.4, pp.351 – 380.

McNelis, P.D. and S.N. Neftci (1983), “ Policy-dependent Parameters in the Presence of Optimal Learning: An Application of Kalman Filtering to the Fair and Sargent Supply-side Equations, ” *The Review of Economics and Statistics*, Vol.65, pp.296-306.

Modigliani, F. and R. Brumberg (1954), “ Utility Analysis and the Consumption Function, ” in *Post Keynesian Economics*, edited by K.K. Kurihara, Rutgers University Press. Pagan, A.R. (1975), “ A Note on the Extraction of Components from Time Series, ” *Econometrica*, Vol.43, pp.163-168.

Pagan, A.R. (1980), “ Some Identification and Estimation Results for Regression Models with Stochastically Varying, ” *Journal of Econometrics*, Vol.13, pp.343-363.

Rao, P. and Z. Griliches (1969), “ Small sample Properties of Several Two-Stage Regression Methods in the Context of Auto-Correlated Errors, ” *Journal of the American Statistical Association*, Vol.64, pp.253-272.

Rund, P.A. (1991), “ Extensions of Estimation Methods Using the EM Algorithm, ” *Journal of Econometrics*, Vol.49, pp.305-341.

Sant, D.T. (1977), “ Generalized Least Squares Applied to Time Varying Parameter Models, ” *Annals of Economic and Measurement*, 6/3, pp.301-311.

Sarris, A.H. (1973), “ A Bayesian Approach to Estimation of Time Varying Regression Coefficients, ” *Annals of Economic and Social Measurement*, 2/4, pp.501-523.

Shumway, R.H. and D.S. Stoffer (1982), “ An Approach to Time Series Smoothing and Forecasting Using the EM Algorithm, ” *Journal of Time Series Analysis*, Vol.3, PP.253-264.

Sidrauski, M. (1967), “ Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy, ” *American Economic Review*, Vol.57, pp.534-544.

Stockman, A. (1981), “ Anticipated Inflation and the Capital Stock in a Cash-in-Advance Economy, ” *Journal of Monetary Economics*, Vol.8, pp.387-393.

Tanizaki, H. (1989), “ The Kalman Filter Model under the Assumption of the First-Order Autoregressive Process in the Disturbance Terms, ” *Economics Letters*, Vol.31, No.2, pp.145-149.

Tanizaki, H. (1991a), *Nonlinear Filters: Estimation and Applications*, Unpublished Dissertation, University of Pennsylvania.

Tanizaki, H. (1992), “ State-Space Model in Linear Case, ” *Kobe-Gakuin Economic Papers*, Vol.24, No.1, pp.121-141.

Tanizaki, H. (1993a), “ Kalman Filter Model with Qualitative Dependent Variable, ” *The Review of Economics and Statistics*, Vol.75, No.4, pp.747–752.

Tanizaki, H. (1993b), “ The State-Space Model with Disturbances Following an ARCH (1) Process, ” *Kobe-Gakuin Economic Papers*, Vol.24, No.4, pp.49-58.

Tanizaki, H. (1993c), *Nonlinear Filters: Estimation and Applications*, (Lecture Notes in Mathematical Economics and Systems, No.400), Springer-Verlag.

Tanizaki, H. and R.S. Mariano (1992a), “ Nonlinear Filtering: Simulation-based Procedures and Application to Prediction with Preliminary Data, ” unpublished manuscript.

Tanizaki, H. and R.S. Mariano (1992b), “ Estimation of Permanent Consumption: A Resolution of Excess Sensitivity and Excess Smoothness, ” unpublished manuscript.

Tanizaki, H. and R.S. Mariano (1994), “ Prediction, Filtering and Smoothing in Nonlinear and Nonnormal Cases Using Monte-Carlo Integration, ” *Journal of Applied Econometrics*, Vol.9, No.2, pp.163–179.

Watanabe, N. (1985), “ Notes on the Kalman Filter with Estimated Parameters, ” *Journal of Time Series*, Vol.6, No.4, pp.269-278.

Watson, M.W. and R.F. Engle (1983), “ Alternative Algorithms for the Estimation of Dynamic Factor, MIMIC and Varying Coefficient Regression Models, ” *Journal of Econometrics*, Vol.23, pp.385-400.

West, K.D. (1988), “ The Insensitivity of Consumption to News about Income, ” *Journal of Monetary Economics*, Vol.21, pp.17-33.

日本語文献

青木正直 (1984) 『時系列解析と日本経済 ― システム論的接近 ―』東洋経済新報社。

有本卓 (1977) 『カルマン・フィルター』産業図書。

岩田暁一 (1967) 『経済分析のための統計的方法』 第 13 章, 東洋経済新報社。

小川一夫 (1988) 「日米消費行動の比較分析 ― 流動性制約と労働市場の関係をめぐって ―」『国民経済雑誌』 第 157 巻, 第 4 号, pp.91-114。

翁邦雄 (1985) 『期待と投機の経済分析 ― 「バブル」現象と為替レート ―』東洋経済新報社。

片山徹 (1983) 『応用カルマンフィルタ』朝倉書店。

加藤寛一 (1987) 『最適制御入門 ― レギュレータとカルマン・フィルタ ―』東京大学出版会。

刈谷武昭監修・日本銀行調査統計局編 (1985) 『計量経済分析の基礎と応用』東洋経済新報社。

斎藤光雄・大鹿隆 (1979) 「貯蓄行動の要因分析」 『経済分析』, 第 74 号, pp.1-22。

砂原善文編 (1981) 『確率システム理論 I 基礎編』朝倉書店。

砂原善文編 (1982a) 『確率システム理論 II 発展編』朝倉書店。

砂原善文編 (1982b) 『確率システム理論 III 応用編』朝倉書店。

谷崎久志 (1987a) 「カルマン・フィルター・モデルの理論と応用」修士論文, 神戸大学。

豊田利久 (1978) 「インフレ期待と家計消費」『国民経済雑誌』 第 138 巻, 第 2 号, pp.55-70。

日本銀行統計局 (1985) 「カルマン・フィルター・モデルによる対米輸出関数の計測について」『調査月報』 日本銀行。

山本拓 (1988) 『経済の時系列分析』創文社現代経済学選書 2。