

「計量経済分析Ⅰ」

「経営学特論Ⅱ（グローバル計量モデル分析）」

「特殊講義（計量経済分析Ⅰ）」

Thur., 8:50-10:20

教室未定

- The prerequisite of this class is **Basic Statistics (統計基礎)** (by Prof. Oya, Tue., 16:50-18:20, this semester), **Special Lectures in Economics (Statistical Analysis), 経済学特論 (統計解析)** (by Prof. Oya, Wed., 10:30-12:00, this semester), **Econometrics (計量経済)** (undergraduate level, next semester, 『計量経済学』山本 拓 著 , 新世社), **Econometrics I (計量経済 I)** (graduate level, this semester), and **Econometrics II (計量経済 II)** (graduate level, next semester).

代表的テキスト：

- J.D. Hamilton (1994) *Time Series Analysis*
沖本・井上訳 (2006) 『時系列解析(上・下)』
- A.C. Harvey (1981) *Time Series Models*
国友・山本訳 (1985) 『時系列モデル入門』
- 沖本竜義 (2010) 『経済・ファイナンスデータの計量時系列分析』

1 最尤法 — 復習

n 個の確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で，同じ確率分布 $f(x) \equiv f(x; \theta)$ とする。
ただし， θ は母数で，例えば， $\theta = (\mu, \sigma^2)$ である。

X_1, X_2, \dots, X_n の結合分布は，互いに独立なので，

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \equiv \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

と表される。

観測データ x_1, x_2, \dots, x_n を与えたもとで， $\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$ は θ の関数として表される。
すなわち，

$$l(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

となる。

$l(\theta)$ を尤度関数と呼ぶ。

$$\max_{\theta} l(\theta)$$

となる θ を最尤推定値 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と呼ぶ。

データ x_1, x_2, \dots, x_n を確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n で置き換えて, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ を最尤推定量と呼ぶ。

$$\max_{\theta} l(\theta)$$

と

$$\max_{\theta} \log l(\theta)$$

の θ の解はともに同じものであることに注意。 $\log l(\theta)$ を対数尤度関数と呼ぶ。

最尤推定量の性質： n が大きいとき，

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma_{\theta}^2)$$

ただし，

$$\sigma_{\theta}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n E\left[\left(\frac{d \log f(X_i; \theta)}{d\theta}\right)^2\right]} = -\frac{1}{\sum_{i=1}^n E\left[\frac{d^2 \log f(X_i; \theta)}{d\theta^2}\right]}$$

θ がベクトル ($k \times 1$) の場合， n が大きいとき，

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, \Sigma_{\theta})$$

ただし，

$$\Sigma_{\theta} = \left(\sum_{i=1}^n E\left[\left(\frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta}\right)'\right]\right)^{-1} = -\left(\sum_{i=1}^n E\left[\frac{\partial^2 \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'}\right]\right)^{-1}$$

例 1： 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本値 x_1, x_2, \dots, x_n を用いて，

(1) σ^2 が既知のとき， μ の最尤推定値と最尤推定量

(2) σ^2 が未知のとき， μ と σ^2 の最尤推定値と最尤推定量

をそれぞれ求める。

[解] $N(\mu, \sigma^2)$ の密度関数は，

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right)$$

となる。したがって，互いに独立な X_1, X_2, \dots, X_n の結合分布は，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) &\equiv \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma^2) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right) \end{aligned}$$

となる。

(1) σ^2 が既知のとき，尤度関数 $l(\mu)$ は，

$$l(\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right)$$

となる。

$l(\mu)$ を最大にする μ と $\log l(\mu)$ を最大にする μ は同じになる。

したがって，対数尤度関数は，

$$\log l(\mu) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

となる。この対数尤度関数を μ に関して最大化すると，

$$\frac{d \log l(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0$$

となる μ を求める。 μ の解を $\hat{\mu}$ とすると， μ の最尤推定値は，

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \equiv \bar{x}$$

を得る。

さらに、観測値 x_1, x_2, \dots, x_n をその確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n で置き換えて、 μ の最尤推定量は、

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv \bar{X}$$

となる。

$\hat{\mu}$ の分散を求めるために、密度関数の対数を取って、

$$\log f(X_i; \mu) = -\frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(X_i - \mu)^2$$

となり、 μ に関して微分して、

$$\frac{d \log f(X_i; \mu)}{d\mu} = \frac{1}{\sigma^2}(X_i - \mu)$$

が得られる。両辺を二乗して、

$$\left(\frac{d \log f(X_i; \mu)}{d\mu} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^4}(X_i - \mu)^2$$

となり，期待値を取ると，

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{d \log f(X_i; \mu)}{d\mu}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] = \frac{1}{\sigma^2}$$

と計算される。

最尤推定量の性質から， n が大きいとき，

$$\hat{\mu} \sim N(\mu, \sigma_\mu^2)$$

ただし，

$$\sigma_\mu^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\left(\frac{d \log f(X_i; \mu)}{d\mu}\right)^2\right]} = \frac{\sigma^2}{n}$$

この場合は， n の大きさに関わらず， $\hat{\mu} \sim N(\mu, \sigma_\mu^2)$ が成り立つ。

(2) σ^2 が未知のとき， μ と σ^2 の尤度関数は，

$$l(\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right)$$

となる。

対数尤度関数は，

$$\log l(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

と表される。

μ と σ^2 について，最大化するためには，

$$\frac{\partial \log l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial \log l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0$$

の連立方程式を解く。

μ, σ^2 の解を $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ とすると，最尤推定値は，

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \equiv \bar{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

となる。

観測値 x_1, x_2, \dots, x_n をその確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n で置き換えて, μ, σ^2 の最尤推定量は,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \equiv \bar{X}$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

となる。

σ^2 の最尤推定量 $\hat{\sigma}^2$ は, σ^2 の不偏推定量 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ とは異なることに注意。

$\theta = (\mu, \sigma^2)'$ とする。 n が大きいとき ,

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, \Sigma_\theta)$$

ただし ,

$$\Sigma_\theta = -\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'}\right]\right)^{-1}$$

となる。 Σ_θ を得るために , 密度関数の対数を取って ,

$$\log f(X_i; \theta) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (X_i - \mu)^2$$

とばり , μ , σ^2 について微分すると ,

$$\frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \sigma^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} (X_i - \mu) \\ -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (X_i - \mu)^2 \end{pmatrix}$$

となる。さらに，もう一度，微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \log f(X_i; \theta)}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \log f(X_i; \theta)}{\partial \mu \partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \log f(X_i; \theta)}{\partial \sigma^2 \partial \mu} & \frac{\partial^2 \log f(X_i; \theta)}{\partial (\sigma^2)^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} & -\frac{1}{\sigma^4}(X_i - \mu) \\ -\frac{1}{\sigma^4}(X_i - \mu) & \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}(X_i - \mu)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。期待値を取って，

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial^2 \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'}\right] &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} & -\frac{1}{\sigma^4}E(X_i - \mu) \\ -\frac{1}{\sigma^4}E(X_i - \mu) & \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}E[(X_i - \mu)^2] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。

よって,

$$\Sigma_{\theta} = -\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'}\right]\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}$$

が得られる。

まとめると, μ, σ^2 の最尤推定量 $\hat{\mu} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$, $\hat{\sigma}^2 = (1/n) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ の分布は, n が大きいとき,

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma}^2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}\right)$$

となる。