1.

$$y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

OLS より、

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1} y_t}{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2} = \phi + \frac{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1} \epsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2}$$

分子に$\frac{1}{\sigma^2 T}$をかける、

$$\frac{1}{\sigma^2 T}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}\epsilon_t = \frac{1}{2}\left(\frac{y_T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\epsilon_t^2 \longrightarrow \frac{1}{2}W(1)^2 - \frac{1}{2}$$

分母に$\frac{1}{\sigma^2 T^2}$をかける、

$$\frac{1}{\sigma^2 T^2}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 \approx \frac{1}{\sigma^2 T^2}\sum_{t=1}^{T} y_t^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{y_t}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 \longrightarrow \int_0^1 W(r)^2 dr$$

ここで、

$$\frac{1}{T} \longrightarrow dr, \frac{y_t}{\sigma\sqrt{T}} \longrightarrow W(r), \frac{t}{T} \longrightarrow r.$$

したがって、$\phi = 1$かつ $T \longrightarrow \infty$のとき

$$T(\hat{\phi} - \phi) = T(\hat{\phi} - 1) = \frac{\frac{1}{\sigma^2 T}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}\epsilon_t}{\frac{1}{\sigma^2 T^2}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2} \longrightarrow \frac{\frac{1}{2}(W(1)^2 - 1)}{\int_0^1 W(r)^2 dr}$$

2.

(a)

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_1: \rho < 0$$

(b)

P 値 = 0.7279 > 0.05、帰無仮説を棄却できない、X_tに単位根があります。

(c)

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_1: \rho < 0$$

(d)

P 値 = 0.2031 > 0.05、帰無仮説を棄却できない、X_tに単位根があります。

3.

(1)

見せかけ回帰とは、二つの無関係な単位根過程x_tとy_tについて、回帰をした時に、x_tとy_tの間に有意な関係があるように見える現象です。

また、$u_t \sim I(1)$のとき、最小二乗法で推定すると、推定量$\hat{\beta}$はβの一致推定量にならない問題があります。

(2)

y_tとx_t共に単位根を持つ(($y_t \sim I(1), x_t \sim I(1)$))、このとき、$y_t$と$x_t$の線形結合が定常、すなわち、$y_t - \beta x_t \sim I(0)$であれば、$y_t$と$x_t$とは共和分の関係にある、この時の回帰は共和分回帰といいます。

また、見せかけ回帰と異なり、$u_t \sim I(0)$のとき、βの最小二乗推定量$\hat{\beta}$は一致性を持ち、x_tとy_tの間には安定的な関係があります。

4.

(1)

共和分ベクトルの OLS 推定値は、u_tに系列相関が存在しても、一致性を持ちます。

(2)

$u_t \sim I(0)$のとき（定常）、$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2 \longrightarrow \sigma^2$となるので、推定値は一致性を持ちます。

(3)

$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{1,t} - \bar{y}_1\right)^2$は無限大に大きくなるので、決定係数$R^2$は 1 に近づきます。