3　確率 (P.29)

3.1　基礎概念 (集合，P.30)

1. 集合 A
2. a が集合 A に属する

   $\Longrightarrow a$ を集合 A の要素または元と呼ぶ

   $\Longrightarrow a \in A$
3. b が集合 A に属していない $\Longrightarrow b \notin A$
4. 空集合 ϕ： 要素を持たない集合

5. **全体集合** Ω**： すべての要素からなる集合**

6. **集合** A, B

7. **部分集合： 集合** A **が集合** B **のすべての要素を含んでいる**

   $\Longrightarrow$ **集合** B **を集合** A **の部分集合**

   $\Longrightarrow A \supset B$

8. **和集合** $A \cup B$**： 集合** A **と集合** B **の少なくとも一方に属する要素の集合**

9. **共通集合，積集合** $A \cap B$**： 集合** A **と集合** B **のどちらにも属する要素の集合**

10. **差集合** $A - B$**： 集合** A **に属していて集合** B **に属さない要素の集合**

11. **補集合** A^c**： 全体集合** Ω **の中で集合** A **に属さない要素の集合**

12. **公式 ($\cup$ と $\cap$ を入れ替えても成立)：**

結合法則： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

交換法則： $A \cup B = B \cup A$

分配法則： $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ド・モルガンの法則： $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

3.2　標本空間 (P.34)

1. **試行： 繰り返し可能な実験 (例：サイコロ投げ)**

2. **標本点 ω： 試行によって得られる個々の結果，実験の可能な結果 (1, 2, 3, 4, 5, 6 のどれかの目) $\Longrightarrow$ 集合の「要素」に対応**

3. **標本空間，全事象** Ω**：標本点全体の集合，実験のすべての可能な結果の集まり** $\Longrightarrow$ **「全体集合」**

4. **事象： 標本空間** Ω **の部分集合，標本点の集まり (例：偶数の目が出るという事象は 2, 4, 6 の目が出るという標本点の集まり)** $\Longrightarrow$ **「一つの集合」**

5. **空事象** ϕ**： 何の結果も起こらない事象** $\Longrightarrow$ **「空集合」**

6. **余事象： ある事象が起こらないという事象** $\Longrightarrow$ **「補集合」**

7. **和事象，積事象** $\Longrightarrow$ **「和集合」,「積集合」**

8. **排反：** $A \cap B = \phi$ **のとき，事象** A **と** B **は排反であるという** $\Longrightarrow$ A **と** A^c **とは排反**

例： サイコロの出る目

1. **標本空間** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. **偶数の目が出る事象** $A = \{2, 4, 6\}$

3. **その余事象** $A^c = \{1, 3, 5\} \Longrightarrow$ **奇数の目が出る事象**

4. $B = \{1, 2, 3, 4\}$ **とする。**

   A **と** B **の和事象：** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

5. A **と** B **の積事象：** $A \cap B = \{2, 4\}$

6. $C = \{1, 3\}$ **とする。**

   $A \cap C = \phi \Longrightarrow$ **事象** A **と** C **は排反**

   $A \cap A^c = \phi \Longrightarrow$ **事象** A **とその余事象** A^c **は排反**

例：コイン投げ 3 回

1. **表を H，裏を T とする。**

2. **標本点は次の 8 つ：**

$$\omega_1 = \{H, H, H\},$$

$$\omega_2 = \{H, H, T\},$$

$$\omega_3 = \{H, T, H\},$$

$$\omega_4 = \{H, T, T\},$$

$$\omega_5 = \{T, H, H\},$$

$$\omega_6 = \{T, H, T\},$$

$$\omega_7 = \{T, T, H\},$$

$\omega_8 = \{T, T, T\}$

3. **標本空間：** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$

4. **2 回目が表であるという事象** E **：**

$E = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\}$

5. **2 回表が出るという事象** F **：**

$F = \{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}$

6. $E \cup F = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$

$E \cap F = \{\omega_2, \omega_5\}$

7. $E^c = \{\omega_3, \omega_4, \omega_7, \omega_8\}$

$F^c = \{\omega_1, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$

8. $(E \cup F)^c = \{\omega_4, \omega_7, \omega_8\}$

$E^c \cap F^c = \{\omega_4, \omega_7, \omega_8\}$

$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c \Longrightarrow$ **ド・モルガンの法則**

9. $(E \cap F)^c = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$

$E^c \cup F^c = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$

$(E \cap F)^c = E^c \cup F^c \Longrightarrow$ **ド・モルガンの法則**

3.3　確率 (P.35)

1. $n(A)$： 事象 A が持つ標本点の数

   $\Longrightarrow$ その事象が起こる場合の数

2. $P(A)$： 事象 A が起こる確率

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

例 3.1：サイコロ投げ

1. 標本空間 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   $\Longrightarrow n(\Omega) = 6$

2. 事象 $A = \{1, 3\}$ が起こる確率

$\Longrightarrow n(A) = 2$

$\Longrightarrow P(A) = \dfrac{2}{6}$

3. 偶数の目が出る確率

$\Longrightarrow$ **偶数の目が出る事象** $B = \{2, 4, 6\}$

$\Longrightarrow n(B) = 3$

$\Longrightarrow P(B) = \dfrac{3}{6}$

4. 1 の目が出る確率

$\Longrightarrow$ **1 の目が出る事象** $C = \{1\}$

$\Longrightarrow n(C) = 1$

$$\Longrightarrow P(C) = \frac{1}{6}$$

確率の性質：

1. $0 \leq P(A) \leq 1$

   証明：

   $n(\phi) \leq n(A) \leq n(\Omega)$

   $n(\phi) = 0$ **により，**

   $$0 \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq 1$$

   を得る。

2. $P(A^c) = 1 - P(A)$

証明：

$n(\Omega) = n(A) + n(A^c)$ の両辺を $n(\Omega)$ で割る。

3. $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

証明：

$n(A) \leq n(B)$ の両辺を $n(\Omega)$ で割る。

加法定理 (P.38)：

1. **加法定理 (P.38)：**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

証明：

$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$,

$n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$,

$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$

から $n(A - B), n(B - A)$ **を消去して，**

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

を得る。$n(\Omega)$ **で両辺を割る。**

2. 事象 A **と** B **が排反の場合，**$P(A \cap B) = 0$ **なので，**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$\Longrightarrow$ **P.35**

乗法定理 (P.39)：

1. $P(A|B)$**： 事象** B **が起こったという条件のもとで事象** A **が起こる確率** $\Longrightarrow$ **条件付き確率**

2. **乗法定理 (P.39)：**

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

証明：

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B)/n(\Omega)}{n(B)/n(\Omega)} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{aligned}$$

3. **例 3.2： ある大学の文系の学生に質問**

$A = \{$ 数学が好きと答えた学生 $\}$

$B = \{$ 経済学部の学生 $\}$

$A \cap B = \{$ 数学が好きと答えた経済学部の学生 $\}$

$P(A|B)$ **は数学が好きと答えた経済学部生の確率を表す。**

4. **例題 3.2 (P.39) の変形，P.44 の問題 3.6： ある大学の経済学部 (E) 300 人，法学部 (J) 200 人の合計 500 人の学生について，数学が好き (M) か嫌い (M^c) かを調査したところ次の結果を得た。**

	経済学部 (E)	**法学部 (J)**
数学が好き (M)	**30**	**20**
数学が嫌い (M^c)	**70**	**80**
計	**100**	**100**

ただし，表中の数値は % で表されているものとする。

(a) 経済学部の学生でしかも数学が好きと答えた学生の確率，

すなわち，$P(E \cap M)$ について

$P(E \cap M) = P(M|E)P(E)$

$P(E) = 300/(300 + 200) = 0.6$,

$P(M|E) = 0.3$ により，

$P(E \cap M) = P(M|E)P(E) = 0.6 \times 0.3 = 0.18$

(b) 数学が好きと答えた学生の中で経済学部の学生の確率，

すなわち，$P(E|M)$ について

$P(E|M) = P(E \cap M)/P(M)$

$P(E \cap M) = 0.18$

$$P(M) = P(\Omega \cap M) = P\Big((E \cup J) \cap M\Big) = P\Big((E \cap M) \cup (J \cap M)\Big) = P(E \cap M) + P(J \cap M) =$$

$$P(M|E)P(E) + P(M|J)P(J) = 0.3 \times 0.6 + 0.2 \times 0.4$$

$$P(E|M) = 0.18/(0.18 + 0.08) = 9/13$$

5. $P(A|B) = P(A)$

$\Longrightarrow$ **事象 A と B が独立**

$\Longrightarrow$ **事象 B が起こる確率は事象 A が起こる確率に依存しない**

6. 事象 A と B が独立のとき，

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$