分布関数の性質：

$$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$$

例：コインを３つ投げて，表の出た個数を X で表すとき，X の確率分布は，

X の取る値	0	1	2	3	計
その確率	1/8	3/8	3/8	1/8	1

となる。

4.1.2 離散型確率分布：2 項分布 (P.48)

例 4.1, 4.2：

ある野球選手のヒットを打つ確率は 0.3 とする。

ヒットを打つという事象 H

ヒットを打たないという事象 H^c

$P(H) = 0.3$, $P(H^c) = 1 - P(H) = 0.7$

3 打席の打つとする。

ヒットを打つ回数を X とする。

X の確率分布を求める。

1 打席目	2 打席目	3 打席目	X	その確率
H	H	H	**3**	$0.3 \times 0.3 \times 0.3 = 0.027$
H	H	H^c	**2**	$0.3 \times 0.3 \times 0.7 = 0.063$
H	H^c	H	**2**	$0.3 \times 0.7 \times 0.3 = 0.063$
H	H^c	H^c	**1**	$0.3 \times 0.7 \times 0.7 = 0.147$
H^c	H	H	**2**	$0.7 \times 0.3 \times 0.3 = 0.063$
H^c	H	H^c	**1**	$0.7 \times 0.3 \times 0.7 = 0.147$
H^c	H^c	H	**1**	$0.7 \times 0.7 \times 0.3 = 0.147$
H^c	H^c	H^c	**0**	$0.7 \times 0.7 \times 0.7 = 0.343$

まとめると，$P(X = 0) = 0.343$,

$P(X = 1) = 3 \times 0.147 = 0.441$,

$P(X = 2) = 3 \times 0.063 = 0.189$,

$P(X = 3) = 0.027,$

となり，

X の取る値	0	1	2	3	計
その確率	0.343	0.441	0.189	0.027	1

を得る。 $\longrightarrow$ 表 4.3

2 項分布で書き直すことができる。

定義：

ある事象が起こる確率 p

n 回の試行を行う。

x 回成功する確率 $P(X=x)$ は，

$$P(X=x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, n$$

となる。ただし，

$${}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \binom{n}{x}$$

とする。

確認のため，$p = 0.3$, $n = 3$ とおいて，

$$P(X=0) = {}_3C_0 0.3^0 (1-0.3)^{3-0} = 0.7^3 = 0.343$$

$$P(X=1) = {}_3C_1 0.3^1 (1-0.3)^{3-1} = 3 \times 0.3 \times 0.7^2 = 0.441$$

$$P(X=2) = {}_3C_2 0.3^2 (1-0.3)^{3-2} = 3 \times 0.3^2 \times 0.7 = 0.189$$

$$P(X=3) = {}_3C_3 0.3^3 (1-0.3)^{3-3} = 0.3^3 = 0.027$$

を得る。

$n = 1$ **のときの 2 項分布** $\Longrightarrow$ **ベルヌイ分布**

補足 — 確率関数

ベルヌイ分布 (Bernoulli Distribution)： 確率変数 X は 0 か 1 の値をとる。確率変数 X が 1 をとる確率を p とする。すなわち，$P(X = 1) = p$ とする。このとき，確率変数 X の確率関数 $f(x)$ は次のように表される。

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \qquad x = 0, 1$$

「確率変数 X はベルヌイ分布に従う」と言う。

確率関数になるための条件（P.47 一番下 2 行）を確認する。

- $f(x) \geq 0 \implies 0 \leq p \leq 1$ なので，$f(0) = 1 - p \geq 0$，$f(1) = p \geq 0$，$x \neq 0, 1$ のとき $f(x) = 0$

- $\sum_x f(x) = 1 \implies \sum_{x=0}^{1} f(x) = f(0) + f(1) = p + (1-p) = 1$

2 項分布 (Binomial Distribution)：確率変数 X は 0，1，$\cdots$，n の値をとる。成功か失敗のいずれかである試行（ベルヌーイ試行と呼ばれる）を独立に n 回行ったときの成功回数を確率変数 X とする。ただし，各試行の成功確率を p とする。このとき，確率変数 X の確率関数 $f(x)$ は次のように表される。

$$f(x) =_n C_x p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \cdots, n$$

「確率変数 X は二項分布に従う」と言う。

確率関数になるための条件（P.47 一番下 2 行）を確認する。

- $f(x) \geq 0 \implies 0 \leq p \leq 1$ なので，すべての $X = \mathbf{0}$，$\mathbf{1}$，$\cdots$，n について $f(x) = p^x(1-p)^{n-x} \geq 0$，$x \neq \mathbf{0}$，$\mathbf{1}$，$\cdots$，$n$ のとき $f(x) = 0$

- $\sum_x f(x) = 1 \implies \sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x(1-p)^{n-x} = (p + (1-p))^n = 1$

(*) 二項定理：

$$
\begin{aligned}
(x+y) &= x + y \\
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\
&\vdots \\
(x+y)^n &= {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \cdots + {}_nC_ny^n
\end{aligned}
$$

$x = p$，$y = 1 - p$ とすると，$(x+y)^n = 1^n = 1$ となる。

右辺の係数だけを取り出す。

1								**1**		**1**							
2							**1**		**2**		**1**						
3						**1**		**3**		**3**		**1**					
4					**1**		**4**		**6**		**4**		**1**				
5				**1**		**5**		**10**		**10**		**5**		**1**			
6			**1**		**6**		**15**		**20**		**15**		**6**		**1**		
7		**1**		**7**		**21**		**35**		**35**		**21**		**7**		**1**	
8	**1**		**8**		**28**		**56**		**70**		**56**		**28**		**8**		**1**

${}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k = {}_nC_k$ が成り立つことを証明すればよい。

幾何分布 (Geometric Distribution)：確率変数 X は **0，1，2，**$\cdots$ の値をとる。成功か失敗のいずれかである試行（ベルヌーイ試行と呼ばれる）を独立に繰り返し，x 回目に初めて成功するという確率変数 X である。ただし，各試行の成功確率を p とする。このとき，確率変数 X の確率関数 $f(x)$ は次のように表される。

$$f(x) = p(1-p)^x \qquad x = 0, 1, 2, \cdots$$

「確率変数 X は幾何分布に従う」と言う。

確率関数になるための条件（P.47 一番下 2 行）を確認する。

- $f(x) \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq p \leq 1$ なので，すべての $X =$ **0，1，2，**$\cdots$ について $f(x) = p(1-p)^x \geq 0$，

  $x \neq$ **0，1，2，**$\cdots$ のとき $f(x) = 0$

- $\sum_{x} f(x) = 1 \implies \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} p(1-p)^x = 1$

$$A = \sum_{x=0}^{\infty} p(1-p)^x = p + \sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^x$$

両辺に $1-p$ **をかけて，** $(1-p)A = \sum_{x=0}^{\infty} p(1-p)^{x+1} = \sum_{x'=1}^{\infty} p(1-p)^{x'}$

途中で， $x' = x+1$ **としている。**

$A - p = (1-p)A$ **なので，** $A = \sum_{x=0}^{\infty} p(1-p)^x = 1$ **となる。**

ポアソン分布 (Poisson Distribution)： **確率変数** X **は** $\mathbf{0}$**，** $\mathbf{1}$**，** $\mathbf{2}$**，** $\cdots$ **の値をとる。このとき，確**

率変数 X の確率関数 $f(x)$ は次のように表される。

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \cdots$$

ただし，$\lambda > 0$ とする。

「確率変数 X はポアソン分布に従う」と言う。

確率関数になるための条件（P.47 一番下 2 行）を確認する。

- $f(x) \geq 0 \implies 0 \leq p \leq 1$ なので，すべての $X = \mathbf{0}$，$\mathbf{1}$，$\mathbf{2}$，$\cdots$ について $f(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} > 0$，
  $x \neq \mathbf{0}$，$\mathbf{1}$，$\mathbf{2}$，$\cdots$ のとき $f(x) = 0$
- $\displaystyle\sum_x f(x) = 1 \implies \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = 1$