$g(x)$ を $x = x_0$ の回りでテーラー展開：

$$
\begin{aligned}
g(x) &= g(x_0) + g^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{g^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{g^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{g^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n
\end{aligned}
$$

$g^{(n)}(x)$ は $g(x)$ の n 回微分

マクローリン展開（$x_0 = 0$ のときのテーラー展開）：

$$
g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n
$$

$f(x) = e^x$ を考える。

$g^{(n)}(x) = e^x$ となる。

$g^{(n)}(0) = e^0 = 1$ となる。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$x = \lambda$ として，

$$e^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

となる。さらに，両辺に $e^{-\lambda}$ をかけて，

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} f(x)$$

$f(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ はポアソン分布の確率関数

●分布との関係

n 回のベルヌイ試行（成功か失敗かの試行）のうち x 回成功する確率 ＝ 二項分布

ベルヌイ試行を繰り返し x 回目に初めて成功する確率 ＝ 幾何分布

$n=1$ の二項分布はベルヌイ分布となる。

- $f(x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots, n$
- $f(x) = {}_1C_x p^x (1-p)^{1-x} = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$

$np = \lambda$（一定）で，$n \longrightarrow \infty$ のとき，二項分布はポアソン分布に等しくなる（証明略）。

p が小さくなるということは，起こる確率が低いということなので，ポアソン分布は稀にしか起こらない場合に使われる。

4.1.3　連続型確率変数 (P.50)

確率変数の実現値が連続した値をとる場合

このような確率変数を連続型確率変数，

その確率分布を連続型確率分布

離散型の場合，$p_i = f(x_i)$

連続型の場合，$f(x)$ は連続曲線

確率密度関数，密度関数 $f(x)$

X **が区間** (a, b) **に入る確率は，**

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathbf{d}x$$

で表される (面積が確率を表す)。ただし，$a < b$ **とする。**

離散型は，

$$p_i = f(x_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots$$

$$\sum_i p_i = \sum_i f(x_i) = 1$$

連続型は

$$f(x) \geq 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathbf{d}x = 1$$

注） X を連続型確率変数とするとき，

$$P(X = x) = P(x \leq X \leq x) = \int_{x}^{x} f(t)\mathbf{d}t = 0$$

となる。

したがって，

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b)$$

$$= P(a \leq X < b)$$

$$= P(a < X < b)$$

となる。

分布関数： $X < x$ となる確率 $P(X < x)$

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathbf{d}t$$

$F(x)$ を用いると，

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$
$$= \int_{-\infty}^{b} f(x)\mathbf{d}x - \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathbf{d}x$$

$$= \int_a^b f(x)\mathbf{d}x$$

離散型と同様に，

$$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$$

という性質を持つ。

4.2　期待値 (P.52)

確率変数 X のある関数： $g(X)$

定義：

$g(X)$ **の期待値** $\mathbf{E}(g(X))$ **：**

$$\mathbf{E}(g(X)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_i g(x_i)p_i = \sum_i g(x_i)f(x_i), \\ \hfill \text{離散型確率変数} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\mathbf{d}x, \\ \hfill \text{連続型確率変数} \end{cases}$$

1. 確率変数 X **の平均** $\mathbf{E}(X)$

$\Longrightarrow X$ **の期待値,** $g(X) = X$

$$\mathbf{E}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_i x_i f(x_i), & \text{離散型確率変数} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathbf{d}x, & \text{連続型確率変数} \end{cases}$$

$$= \mu, \quad (\text{または，} \mu_x)$$

2. 確率変数 X の分散 $\mathbf{V}(X)$

$\Longrightarrow (X - \mu)^2$ **の期待値,** $g(X) = (X - \mu)^2$

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mu)^2)$$

$$
= \begin{cases} \displaystyle\sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i), \\ \qquad\qquad \text{離散型確率変数} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathbf{d}x, \\ \qquad\qquad \text{連続型確率変数} \end{cases}
$$

$$
= \sigma^2, \quad (\text{または，} \sigma_x^2)
$$

確率変数 X の分散 $\mathrm{V}(X)$

$\Longrightarrow X$ の確率分布の確率関数 (離散型の場合)，または，確率密度関数 (連続型の場合) の範囲が広ければ，$\mathrm{V}(X)$ は大きい。