$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	**計** (**X の周辺分布**)
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	$p_{n\cdot}$
計 (**Y の周辺分布**)	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot m}$	**1**

1. $p_{i\cdot}$**,** $i = 1, 2, \cdots, n$ **:**

Y がどの値をとるかに依存せず，X が x_i という値をとる確率

$\Longrightarrow$ **確率変数 X の周辺分布**

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = f(x_i) = P(X = x_i)$$

$f(x_i)$ **： 確率変数 X の周辺確率関数**

2. $p_{\cdot j}$**,** $j = 1, 2, \cdots, m$ **：**

X **がどの値をとるかに依存せず，** Y **が** y_j **という値をとる確率**

$\Longrightarrow$ **確率変数 Y の周辺分布**

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = f(y_j) = P(Y = y_j)$$

$f(y_j)$ **： 確率変数 Y の周辺確率関数**

3. 確率の総和は 1

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} p_{\cdot j} = 1$$

連続型についても同様

条件付き確率 (P.59)：　事象 A, B について，条件付き確率 (P.38):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

をもとにして，

$Y = y_j$ の条件もとでの $X = x_i$ の確率

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

確率関数による表現： $Y = y_j$ を与えたときの X の条件付き確率関数 $f(x_i|y_j)$

$$f(x_i|y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{f(y_j)}$$

事象 A, B は独立 (P.41):

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

をもとにして，

X が x_i という値をとる事象と Y が y_j という値をとる事象が独立

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

確率関数による表現：

$$f(x_i, y_j) = f(x_i)f(y_j)$$

$$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

すべての i, j について成り立つとき，X と Y は独立であるという。

連続型についても同様

期待値 (P.60)：　ある関数 $g(X, Y)$ の期待値：$\mathbf{E}(g(X, Y))$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(g(X, Y)) &= \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) f(x_i, y_j)\end{aligned}$$

平均：

X **の平均：** X **の期待値：** $g(X, Y) = X$ **のケース：**

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i f(x_i, y_j) \\ &= \sum_i x_i \sum_j p_{ij} = \sum_i x_i p_{i\cdot} = \sum_i x_i f(x_i)\end{aligned}$$

$$= \mu_x$$

Y の平均： Y の期待値： $g(X, Y) = Y$ のケース：

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \sum_i \sum_j y_j f(x_i, y_j) \\
&= \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_j y_j p_{\cdot j} = \sum_j y_j f(y_j) \\
&= \mu_y
\end{aligned}$$

分散：

X の分散： $(X - \mu_x)^2$ の期待値： $g(X, Y) = (X - \mu_x)^2$ のケース：

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mu_x)^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)^2 p_{ij} \\
&= \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)^2 f(x_i, y_j) \\
&= \sum_i (x_i - \mu_x)^2 \sum_j p_{ij} = \sum_i (x_i - \mu_x)^2 p_{i\cdot} \\
&= \sum_i (x_i - \mu_x)^2 f(x_i) \\
&= \sigma_x^2
\end{aligned}
$$

Y の分散： $(Y-\mu_y)^2$ の期待値： $g(X,Y) = (Y-\mu_y)^2$ のケース：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}(Y) &= \mathbf{E}((Y-\mu_y)^2) \\
&= \sum_i \sum_j (y_j - \mu_y)^2 p_{ij} \\
&= \sum_i \sum_j (y_j - \mu_y)^2 f(x_i, y_j)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_j (y_j - \mu_y)^2 \sum_i p_{ij} = \sum_j (y_j - \mu_y)^2 p_{\cdot j} \\
&= \sum_j (y_j - \mu_y)^2 f(y_j) \\
&= \sigma_y^2
\end{aligned}
$$

共分散：

X **と** Y **の共分散：** $(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$ **の期待値：** $g(X, Y) = (X - \mu_x)(Y - \mu_y)$ **のケース：**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(X, Y) &= \mathbf{E}((X - \mu_x)(Y - \mu_y)) \\
&= \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) p_{ij} \\
&= \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) f(x_i, y_j)
\end{aligned}
$$

いくつかの公式：

1. **確率変数 X, Y について，**

定理 4.5 (P.60)： $\mathbf{E}(X \pm Y) = \mathbf{E}(X) \pm \mathbf{E}(Y)$

証明：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X \pm Y) &= \sum_i \sum_j (x_i \pm y_j) p_{ij} \\
&= \sum_i \sum_j x_i p_{ij} \pm \sum_i \sum_j y_j p_{ij} \\
&= \mathbf{E}(X) \pm \mathbf{E}(Y)
\end{aligned}
$$

2. **確率変数 X と Y が独立のとき，**

定理 4.6 (P.61)： $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$

証明：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(XY) &= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} \\
&= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{i\cdot} p_{\cdot j} \\
&= \sum_i x_i p_{i\cdot} \sum_j y_j p_{\cdot j} \\
&= \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)
\end{aligned}
$$

途中で， $p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$ **を用いる。**

3. 確率変数 X**,** Y **について，**

定理 4.7 (P.61)： $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$

証明：

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Cov}(X, Y) \\
&= \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) p_{ij} \\
&= \sum_i \sum_j (x_i y_j - \mu_x y_j - \mu_y x_i + \mu_x \mu_y) p_{ij} \\
&= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} \\
&- \mu_x \sum_i \sum_j y_j p_{ij} \\
&- \mu_y \sum_i \sum_j x_i p_{ij} \\
&+ \mu_x \mu_y \sum_i \sum_j p_{ij} \\
&= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - \mu_x \mu_y - \mu_y \mu_x + \mu_x \mu_y
\end{aligned}
$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - \mu_x \mu_y$$

$$= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

より，一般的な証明：

$$\mathbf{Cov}(X, Y)$$

$$= \mathbf{E}((X - \mu_x)(Y - \mu_y))$$

$$= \mathbf{E}(XY - \mu_x Y - \mu_y X + \mu_x \mu_y)$$

$$= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(\mu_x Y) - \mathbf{E}(\mu_y X) + \mu_x \mu_y$$

$$= \mathbf{E}(XY) - \mu_x \mathbf{E}(Y) - \mu_y \mathbf{E}(X) + \mu_x \mu_y$$

$$= \mathbf{E}(XY) - \mu_x \mu_y - \mu_y \mu_x + \mu_x \mu_y$$

$$= \mathbf{E}(XY) - \mu_x \mu_y$$

$$= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

4. 確率変数 X と Y が独立のとき，

定理 4.6 より，

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

となるので，

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$$

を得る。

5. 相関係数 ρ_{xy} (P.62)：

$$\rho_{xy} = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)}\sqrt{\mathbf{V}(Y)}}$$

$$= \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

6. 確率変数 X と Y が独立のとき，

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$$

となるので，

$$\rho_{xy} = 0$$

を得る。

7. 確率変数 X, Y について，

$$\mathbf{V}(X \pm Y) = \mathbf{V}(X) \pm 2\mathbf{Cov}(X, Y) + \mathbf{V}(Y)$$