証明：

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{V}(X \pm Y) \\
&= \mathbf{E}\Big(((X \pm Y) - \mathbf{E}(X \pm Y))^2\Big) \\
&= \mathbf{E}\Big(((X - \mu_x) \pm (Y - \mu_y))^2\Big) \\
&= \mathbf{E}((X - \mu_x)^2 \pm 2(X - \mu_x)(Y - \mu_y) \\
&\qquad\qquad +(Y - \mu_y)^2) \\
&= \mathbf{E}((X - \mu_x)^2) \\
&\pm 2\mathbf{E}((X - \mu_x)(Y - \mu_y)) \\
&+ \mathbf{E}((Y - \mu_y)^2) \\
&= \mathbf{V}(X) \pm 2\mathbf{Cov}(X, Y) + \mathbf{V}(Y)
\end{aligned}
$$

8. $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

証明：

次のような t に関する式を考える。

$f(t) = \mathbf{V}(Xt - Y)$

分散なので，必ずゼロ以上となる。よって，すべての t について，$f(t) \geq 0$ となるための条件を求めればよい。t に関する２次方程式の判別式がゼロ以下となる条件を求める。

$\mathbf{V}(Xt - Y)$

$= \mathbf{V}(Xt) - 2\mathbf{Cov}(Xt, Y) + \mathbf{V}(Y)$

$= t^2\mathbf{V}(X) - 2t\mathbf{Cov}(X, Y) + \mathbf{V}(Y)$

$$\frac{D}{2} = (\mathbf{Cov}(X, X))^2 - \mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y) \leq 0$$

$$\frac{(\mathbf{Cov}(X, Y))^2}{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)}\sqrt{\mathbf{V}(Y)}} \leq 1$$

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

ρ_{xy} **が 1 に近いほど，正の相関が強くなる。**

ρ_{xy} **が** -1 **に近いほど，負の相関が強くなる。**

9. 確率変数 X **と** Y **が独立のとき，**

定理 4.8 (P.62)： $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$

証明：

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + 2\mathbf{Cov}(X, Y) + \mathbf{V}(Y)$$

確率変数 X と Y が独立のとき，

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$$

なので，

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$$

を得る。

10. n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で同じ平均 μ，分散 σ^2 を持つとする。すなわち，すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について，

$$\mathbf{E}(X_i) = \mu, \quad \mathbf{V}(X_i) = \sigma^2$$

を仮定する。

さらに，算術平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ を考える。

このとき，

定理 4.9 (P.62)： $\mathbf{E}(\overline{X}) = \mu$, $\mathbf{V}(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

が成り立つ。

証明：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\overline{X}) &= \mathbf{E}(\sum_i \frac{X_i}{n}) \\
&= \sum_i \mathbf{E}(\frac{X_i}{n}) \qquad \longleftarrow \ \textbf{定理 4.5 (P.60)} \\
&= \sum_i \frac{1}{n}\mathbf{E}(X_i) \qquad \longleftarrow \ \textbf{定理 4.1 (P.54)} \\
&= \sum_i \frac{1}{n}\mu
\end{aligned}
$$

$$= \mu$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\overline{X}) &= \mathbf{V}\Big(\sum_i \frac{X_i}{n}\Big) \\
&= \sum_i \mathbf{V}\Big(\frac{X_i}{n}\Big) \qquad \longleftarrow \ \textbf{定理 4.8 (P.62)} \\
&= \sum_i \frac{1}{n^2}\mathbf{V}(X_i) \qquad \longleftarrow \ \textbf{定理 4.3 (P.55)} \\
&= \sum_i \frac{1}{n}^{2} \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

例題 4.1 (P.63)：　2 つの離散型確率変数 X, Y の同時確率分布は，

$X \setminus Y$	**0**	**1**
1	c	**0.3**
2	**0.2**	**0.1**

とする。

1. c **の値は？**

   $c + 0.3 + 0.2 + 0.1 = 1$ **により，** $c = 0.4$

2. X **と** Y **の周辺分布は，**

$X \setminus Y$	0	1	X の周辺分布
1	c	0.3	0.7
2	0.2	0.1	0.3
Y の周辺分布	0.6	0.4	1.0

となる。

3. X の周辺分布の平均と分散は？

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_i \sum_j x_i p_{ij} \\
&= \sum_i x_i p_{i\cdot} \\
&= 1 \times 0.7 + 2 \times 0.3
\end{aligned}
$$

$$= 1.3$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}((X - \mu_x)^2) \\
&= \mathbf{E}(X^2) - \mu_x^2 \\
&= \sum_i \sum_j x_i^2 p_{ij} - \mu_x^2 \\
&= \sum_i x_i^2 p_{i\cdot} - \mu_x^2 \\
&= 1^2 \times 0.7 + 2^2 \times 0.3 - 1.3^2 \\
&= 0.21
\end{aligned}$$

4. $Y = 0$ **が与えられたときの** X **の条件付き分布は？**

$$P(X = 1|Y = 0) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{0.4}{0.6} \\
&= \frac{2}{3} \\
P(X = 2|Y = 0) &= \frac{P(X = 2, Y = 0)}{P(Y = 0)} \\
&= \frac{0.2}{0.6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

5. $Z = X + Y$ のときの Z の確率分布は？

$$
\begin{aligned}
P(Z = 1) &= P(X = 1, Y = 0) \\
&= 0.4 \\
P(Z = 2) &= P(X = 1, Y = 1) \\
&\quad + P(X = 2, Y = 0)
\end{aligned}
$$