2021/08/04

特別講義（統計学入門I）
定期試験 の 解答

提出締切時間:　2021 年 8 月 4 日 AM10:30 まで

- 必ず，氏名・学籍番号を解答用紙に書いてください。
- `tanizaki@econ.osaka-u.ac.jp` 宛に解答を，pdf ファイル・画像ファイルで送ってください。
- Subject に 「統計」としてください。でなければ，メールがごみ箱に行く可能性があります。
- ファイルサイズは，読める範囲内で，出来るだけ小さくして下さい。

IrfanView (https://www.irfanview.com/) というソフトでファイルサイズを小さくすることができます。

- 計算問題では，どのように計算したかを必ず答案に書いて下さい。
- 成績評価について，シラバスでは「定期試験 80 %，宿題 20 %」としています。
  小問各 3 点（3 点× 27 問＝ 81 点満点）　$\longrightarrow$　問 (20) は全員＋ 3 点

$\boxed{1}$　離散型確率変数 X が次の分布に従うものとする。

X の取る値 x	0	1	3	6
その確率 $P(X=x)=f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{6}$

このとき，次の問に答えなさい。

(1)　c の値を求めなさい。

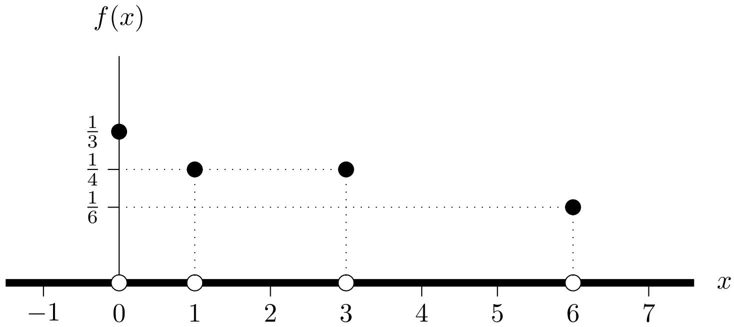
[解]　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+c+\dfrac{1}{6}=1$ なので，$c=\dfrac{1}{4}$

(2)　$f(x)$ のグラフを，縦軸・横軸と区別するために，**太線** で描きなさい。また，白丸 $\circ$ と黒丸 $\bullet$ の区別をすること。

[解]　$f(x)$ は次の通りである。

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}, & x=0 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{4}, & x=1 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{4}, & x=3 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{6}, & x=6 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

よって，グラフは太線＋黒丸で表される。



(*) $x = 0,\ 1,\ 3,\ 6$ 以外は，確率 0 なので，横軸が太線となる。

(3) X の期待値（すなわち，平均）を求めなさい。

[解]

$$\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i f(x_i) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{6} = 2$$

(4) X の分散を求めなさい。

[解] 問 (3) より，$\mu = \mathrm{E}(X) = 2$ である。

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}((X-\mu)^2) = \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i) \\
&= (0-2)^2 \times \frac{1}{3} + (1-2)^2 \times \frac{1}{4} + (3-2)^2 \times \frac{1}{4} + (6-2)^2 \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

(5) X の平均，分散をそれぞれ μ，σ^2 とする。$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ とするとき，$\mathrm{E}(Z^3)$ を求めなさい。さらに，問 (2) のグラフと $\mathrm{E}(Z^3)$ との関係を簡単に説明しなさい。

[解] $Z = \dfrac{\sqrt{2}}{3}(X-2)$ となる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z^3) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 \mathrm{E}((X-\mu)^3) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 \left((0-2)^3 \times \frac{1}{3} + (1-2)^3 \times \frac{1}{4} + (3-2)^3 \times \frac{1}{4} + (6-2)^3 \times \frac{1}{6}\right) \\
&= \left(\frac{2\sqrt{2}}{27}\right) \times 8
\end{aligned}$$

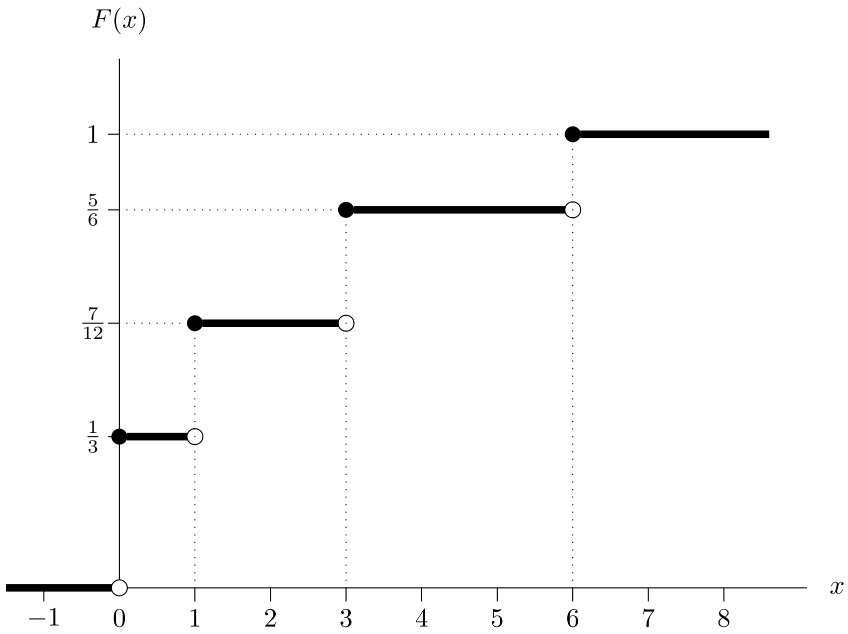
$\mathrm{E}(Z^3) = \dfrac{16\sqrt{2}}{27} > 0$ なので，X の分布は右に歪んでいる。問 (2) のグラフを見ても，右の裾野が広く，右に歪んだ分布になっている。

(6) $F(x)$ を分布関数（または，累積分布関数）とする。$F(x)$ のグラフを，縦軸・横軸と区別するために，**太線** で描きなさい。また，白丸 $\circ$ と黒丸 $\bullet$ の区別をすること。

[解]　$F(x)$ は次の通りである。

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}, & 1 \leq x < 3 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{6}, & 3 \leq x < 6 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} = 1, & 6 \leq x \text{ のとき} \end{cases}$$

よって，グラフは太線＋黒丸で表される。



(*) $x < 0$ のとき，$x \geq 6$ のときが重要。

(*) 次の (7) ～ (11) を求めなさい。

[解]

(7) $f(3) = \dfrac{1}{4}$　(8) $f(3.5) = 0$　(9) $F(-1) = 0$　(10) $F(3.5) = \dfrac{5}{6}$　(11) $F(10) = 1$

$\boxed{2}$ 次の問に答えなさい。

(12) $X \sim N(2,4)$ のとき，$P(X \leq 3.5)$ を求めなさい。

[解] $Z = \dfrac{X-2}{\sqrt{4}} \ \sim \ N(0,1)$ となる。

$$\begin{aligned} P(X \leq 3.5) &= P\Big(\frac{X-2}{2} \leq \frac{3.5-2}{2}\Big) = P(Z \leq 0.75) = 1 - P(Z > 0.75) \\ &= 1 - 0.2266 = 0.7734 \end{aligned}$$

(13) $X \sim N(1,9)$ のとき，$P(X \geq x) = 0.76$ となる x を求めなさい（表から得られる最も近い x を求めること）。

[解] $Z \sim N(0,1)$ のとき，$P(Z \geq -z) = 0.76$ となる z を求める。

$P(Z \geq -z) = 1 - P(Z < -z) = 1 - P(Z > z)$ なので，$P(Z > z) = 1 - 0.76 = 0.24$ となる z は 0.71 で 0.24 に最も近い。すなわち，$P(Z > 0.71) = 0.2389 \quad 0.24$ となる。

$Z = \dfrac{X-1}{\sqrt{9}} \ \sim \ N(0,1)$ となる。

$$P(X \geq x) = P\Big(\frac{X-1}{3} \geq \frac{x-1}{3}\Big) = 1 - P\Big(Z < \frac{x-1}{3}\Big) = 1 - P\Big(Z > -\frac{x-1}{3}\Big) = 0.76$$

よって，

$$P\Big(Z > -\frac{x-1}{3}\Big) = P(Z > 0.71) = 0.24$$

となるので，

$$-\frac{x-1}{3} = 0.71$$

したがって，$x = -0.71 \times 3 + 1 = -1.13$ となる。

(14) $Z \sim N(0,1)$ のとき，$P(Z^2 \geq 1.96)$ を求めなさい。

[解] $P(Z^2 \geq 1.96) = P(Z < -1.4,\ Z > 1.4) = P(Z < -1.4) + P(Z > 1.4) = 2 \times P(Z > 1.4) = 2 \times 0.0808 = 0.1616$

(15) $U \sim \chi^2(10)$ のとき，$P(U \leq u) = 0.05$ となる u を求めなさい。

[解] $P(U \leq u) + P(U > u) = 1$ から $P(U > u) = 0.95$ となる。よって，$u = 3.94$

(16) $U \sim \chi^2(5)$ のとき，$P(1.15 \leq U \leq 9.24)$ を求めなさい。

[解] $P(1.15 \leq U \leq 9.24) = P(U \geq 1.15) - P(U > 9.24) = 0.95 - 0.1 = 0.85$

(17) $T \sim t(8)$ のとき，$P(|T| \geq 2.306)$ を求めなさい。

[解] $P(|T| \geq 2.306) = P(T \leq -2.306,\ T \geq 2.306) = P(T \leq -2.306) + P(T \geq 2.306) = 2 \times P(T > 2.306) = 2 \times 0.025 = 0.05$

(18) $T \sim t(10000)$ のとき，$P(-1.52 < T < 2.17)$ を求めなさい。

[解] $t(\infty) = N(0, 1)$ なので，$t(10000)$ は $N(0, 1)$ で十分に近似できる。

よって，$P(-1.52 < T < 2.17) = P(-1.52 < Z < 2.17) = 1 - P(Z > 1.52) - P(Z > 2.17) = 1 - 0.0643 - 0.0150 = 0.9207$ となる。

$\boxed{3}$ ある地区の 100 世帯の年収を調査して，次の度数分布表が得られたとする。

境界階級値	度数
300 万円未満	12
300 万円以上 600 万円未満	35
600 万円以上 900 万円未満	30
900 万円以上 1200 万円未満	c

次の問に答えなさい。

(19) c の値を求めなさい。

[解] $12 + 35 + 30 + c = 100$ なので，$c = 23$

(20) 問題未作成のため，全員 3 点加点

(21) この 100 世帯の平均年収を求めなさい。

[解] 階級値はそれぞれ上から，150，450，750，1050 である（単位は万円）。

したがって，平均年収は $150 \times \frac{12}{100} + 450 \times \frac{35}{100} + 750 \times \frac{30}{100} + 1050 \times \frac{23}{100} = 642$ (万円) となる。

(22) 100 世帯の分散，標準偏差を求めなさい。

[解] 分散は $(150-642)^2 \times \frac{12}{100} + (450-642)^2 \times \frac{35}{100} + (750-642)^2 \times \frac{30}{100} + (1050-642)^2 \times \frac{23}{100} = 83736$ となる。

標準偏差は $\sqrt{83736}$ 　289 (万円) となる。

(23) メディアン（中央値），モード（最頻値）を階級値で答えなさい。

[解] メディアンは 50 番目と 51 番目の階級値で 750，モードは 450

$\boxed{4}$ コインを 3 回投げるという試行を行う。表の出た回数を確率変数 X とする。2 回目に表，3 回目に裏が出れば 1，そうでなければ -1 とする確率変数を Y とする。

(24) 標本点をすべて書き出しなさい。記号は各自定義してよい。

[解] 表を H，裏を T とする。1 回目，2 回目，3 回目の結果を順番に書くと，標本点は，

$\omega_1 = \{HHH\}$,

$\omega_2 = \{HHT\}$,

$\omega_3 = \{HTH\}$,

$\omega_4 = \{HTT\}$,

$\omega_5 = \{THH\}$,

$\omega_6 = \{THT\}$,

$\omega_7 = \{TTH\}$,

$\omega_8 = \{TTT\}$ となる。

(25) X と Y の同時確率分布を求めなさい（表を作成しなさい）。

[解]

$X \setminus Y$	-1	1
0	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	0

(*) 1 を 2 列目，-1 を 3 列目としている人が多かった。慣例として，小さい数字が左（または，上），大きい数字が右（または，下）とする。

(26) $\mathrm{E}(3X+4Y+2)$ を計算しなさい。

[解] X，Y の周辺分布を加えると，

$X \setminus Y$	-1	1	
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

となる。

$\mathrm{E}(3X+4Y+2) = 3\mathrm{E}(X) + 4\mathrm{E}(Y) + 2$

$\mathrm{E}(X) = 0 \times \dfrac{1}{8} + 1 \times \dfrac{3}{8} + 2 \times \dfrac{3}{8} + 3 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{2}$

$\mathrm{E}(Y) = -1 \times \dfrac{3}{4} + 1 \times \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2}$

よって，$\mathrm{E}(3X+4Y+2) = 3\mathrm{E}(X) + 4\mathrm{E}(Y) + 2 = 3 \times \dfrac{3}{2} + 4 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2 = 4.5$

(27) 2 回目に表が出るというもとで，表が 2 回出る条件付確率を求めなさい。

[解] 2 回目に表が出る事象を A，表が 2 回出る事象を B とする。このとき，A，B，$A \cap B$ は次のようになる。

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\}$$
$$B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}$$
$$A \cap B = \{\omega_2, \omega_5\}$$

よって，$n(A \cap B)$，$n(A)$，$n(\Omega)$ を，それぞれ，事象 $A \cap B$ の標本点数，事象 A の標本点数，標本空間（または，全事象）Ω の標本点数とするとき，条件付確率 $P(B|A)$ は,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)/n(\Omega)}{n(A)/n(\Omega)} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$$

となる。