特別講義（統計学入門II）

水曜 1 限（8:50 ~ 10:20）

文法経講義棟 第 23 番講義室

- **教科書『基本統計学（第3版）』（豊田他著，東洋経済新報社，2010年）の第6章以降**

Zoomアドレス，講義ノートなどは，

http://www2.econ.osaka-u.ac.jp/~tanizaki/class/2021/index.htm

に掲載します。

- **この講義ノートの文中のページは教科書『基本統計学（第3版）』のページに対応。**

6　標本分布 (P.83)

統計分析の目的：

分析の対象とされている集団の特性を，そこから取り出されたデータ（標本）を用いて，引き出すこと。

- **分析の対象とされている集団 $\Longrightarrow$ 母集団**
- **分析の対象とされている集団の特性 $\Longrightarrow$ 平均，分散，…**
- **そこから取り出されたデータ $\Longrightarrow$ 標本**

母集団から標本を取り出すこと $\Longrightarrow$ 標本抽出

問題： 標本抽出の方法 $\Longrightarrow$ 無作為抽出

作為なく抽出された標本 $\Longrightarrow$ 無作為標本

無作為標本に基づいて，母集団に関する特性を統計的に推論すべき。

母集団から取り出された無作為標本が n 個の要素から成る。

$\Longrightarrow$ n を標本の大きさと呼ぶ。

重要：

n 個の要素から成る標本を確率変数とみなす。

確率変数： $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

その実現値：$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \Longrightarrow$ 個々の要素は数値

無作為標本 $\Longrightarrow$ n 個 の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立。

大きさ n の無作為標本から求められる平均 $\Longrightarrow$ 標本平均 $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

大きさ n の無作為標本から求められる不偏分散 $\Longrightarrow$ 標本不偏分散 S^2

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

n でなく $n-1$ で割る理由，不偏の意味は後述 (P.108)

一般に，標本の要素の関数 $\Longrightarrow$ 統計量 T

$$T = f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

例： 標本平均 $\overline{X}$，標本不偏分散 S^2

統計量の分布 $\Longrightarrow$ 標本分布

問題：

標本平均の標本分布は？

標本不偏分散の標本分布は？

6.1　標本平均の標本分布 (P.86)

無作為標本を構成する要素：$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ はそれぞれ独立に同じ分布従う確率変数と考える。

すなわち，すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について，

$$\mathbf{E}(X_i) = \mu, \quad \mathbf{V}(X_i) = \sigma^2$$

となる。標本平均 $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

を考えよう。

(1) 定理 4.9 (P.62) から，標本平均 $\overline{X}$ の平均と分散は，

$$\mathbf{E}(\overline{X}) = \mu, \quad \mathbf{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

によって与えられる。

(2) すべての i について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき，標本平均 $\overline{X}$ の分布は，

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

すなわち，「平均 μ，分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布」となる。

(P.73 の最後の段落，P.89 の 6.3 節の直前)

(3) $\mathbf{E}(\overline{X}) = \mu$，$\mathbf{V}(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ なので，

標本平均 $\overline{X}$ の標準化 (基準化) を行う (定理 4.4，P.56)。

$$Z_n = \frac{\overline{X} - \mathbf{E}(\overline{X})}{\sqrt{\mathbf{V}(\overline{X})}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

このとき，標本の大きさ n が大きくなるにつれて (大標本のとき)，標本平均 $\overline{X}$ の分布は，

$$Z_n \longrightarrow N(0,1)$$

となる。$\Longrightarrow$ 定理 6.1 中心極限定理 (P.90)

n の大きさにかかわらず，$\mathbf{E}(Z_n) = 0$，$\mathbf{V}(Z_n) = 1$ に注意。

n が大きくなるにつれて，Z_n は正規分布に近づくということがポイント。