(4) Z_n **の分母の** σ^2 **をその推定量** S^2 **で置き換えても，(3) の中心極限定理はそのまま成立する。**

すなわち，

$$Z_n = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

のとき，標本の大きさ n **が大きくなるにつれて (大標本のとき)，標本平均** $\overline{X}$ **の分布は，**

$$Z_n \longrightarrow N(0, 1)$$

となる。$\Longrightarrow$ **定理 6.1 中心極限定理の変形 (P.92 の (6.12) 式)**

注意点)：

(1), (2) $\Longrightarrow$ **標本の大きさ** n **に無関係**

(3), (4) $\Longrightarrow$ 標本の大きさ n が大きいときにのみ成立

(1), (3), (4) $\Longrightarrow$ 標本の要素 X_i の分布は必要なし (離散型・連続型共に成立)

(2), (3), (4) $\Longrightarrow$ 標本平均 $\overline{X}$ の分布は正規分布

(4) $\Longrightarrow$ σ^2 を S^2 に置き換えても中心極限定理が成立

問題 6.3 (P.101)：　一世帯当たりの純金融資産残高は，過去の調査から，平均 480 万円，標準偏差 320 万円の正規分布であると仮定する。64 世帯を無作為抽出したとき，その標本平均が 450 万円以上 500 万円以下である確率は？

解答：　すべての i について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき，

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$\mu = 320$, $\sigma^2 = 320^2$, $n = 64$

$P(450 \leq \overline{X} \leq 500)$ を求める。

$$\begin{aligned}
&P(450 \leq \overline{X} \leq 500) \\
&= P\left(\frac{450-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{500-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(\frac{450-480}{320/\sqrt{64}} \leq Z \leq \frac{500-480}{320/\sqrt{64}}\right) \\
&= P(-0.75 \leq Z \leq 0.5) \\
&= 1 - P(Z > 0.75) - P(Z > 0.5) \\
&= 1 - 0.3085 - 0.2266 = 0.4649
\end{aligned}$$

例題 6.1 (P.90)：　**A 市の家計の年間所得は，過去からの調査で，平均 550 万円，標準偏差 250 万円である。100 世帯の標本抽出で，その平均所得が 600 万円を越える確率は？**

解答：　**母平均** $\mu = 550$**，**

母分散 $\sigma^2 = 250^2$**，**

標本の大きさ $n = 100$

標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

標準化 $Z_n = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

n が大きいとき，$Z_n \sim N(0,1) \Longrightarrow$ 定理 6.1

$P(\overline{X} > 600)$ を求める。

$$\begin{aligned} P(\overline{X} > 600) &= P(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{600 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}) \\ &= P(Z_n > \frac{600 - 550}{250/\sqrt{100}}) \\ &= P(Z_n > 2) = 0.0228 \end{aligned}$$

100 世帯の平均所得が 600 万円を越える確率は 2.28 ％ である。

表 1: χ^2 分布表 $\chi^2(k)$： P.252

$$\alpha = \mathrm{Prob}(U > \chi^2_\alpha) = \int_{\chi^2_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}-1} \exp(-\frac{1}{2}x)\mathrm{d}x$$

α / k	.995	.99	.975	.95	.90	.10	.05	.025	.010	.005
1	.000	.000	.001	.004	.016	2.706	3.842	5.024	6.635	7.879
2	.010	.020	.051	.103	.211	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597
3	.072	.115	.216	.352	.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	.207	.297	.484	.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	.412	.554	.831	1.146	1.610	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.054	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.820

6.2　正規母集団からの標本分布 (P.92)

母集団の確率分布が正規分布であるという仮定のもとで，標本平均や標本不偏分散の標本分布を考える。

母集団の確率分布が正規分布 $\Longrightarrow$ 正規母集団

すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ で，

しかも，X_1, X_2, $\cdots$, X_n は互いに独立である

と仮定する。

1. **定理 6.2 (P.93)：** **このとき，**

$$U = \sum_{i=1}^{n} (\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n)$$

自由度 n **のカイ 2 乗分布：** $\chi^2(n)$

2. **定理 6.3 (P.94)：** μ **を** $\overline{X}$ **で置き換えると，**

$$U = \sum_{i=1}^{n} (\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

ただし， $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ **(標本不偏分散) とする。**

$\Longrightarrow$ **標本不偏分散の標本分布**

カイ 2 乗分布 $\Longrightarrow$ **形状は自由度に依存する (図 6.1, P.93)**

そのため，上側確率 0.995, 0.990, 0.975, 0.950, 0.050, 0.025, 0.010, 0.005 の値のみが付表になっている。

自由度もいくつか限定されている。

例： $U \sim \chi^2(5)$ **のとき，**$P(U > 11.0705) = 0.05 \Longrightarrow$ **付表 2 (P.252)，図 6.2 (P.94)**

例題 6.3 (P.95)：　家計の年間所得は正規分布と仮定する。母集団から 17 人を選び，標本不偏分散を計算した。標本不偏分散が母分散の 2 倍を越えない確率は？

解答： $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ **を利用して，**$P(S^2 < 2\sigma^2)$ **を求めたい。**

$$P(S^2 < 2\sigma^2) = P\Big(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < 2(n-1)\Big)$$

$= P(U < 32)$

この場合，$n = 17$ **なので，自由度は** $n - 1 = 16$ **となるので，**

$U \sim \chi^2(16)$

から確率を求める。

$P(U < 32) = 1 - P(U > 32) = 1 - 0.010 = 0.990$

1. **定理 6.4 (P.96)：**

   $Z \sim N(0, 1)$,

   $U \sim \chi^2(k)$,

   Z **と** U **が独立**