表 2: t 分布表 $t(m)$： P.253

$$\alpha = P(T > t_\alpha) = \int_{t_\alpha}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{1}{\sqrt{m\pi}} \frac{1}{(1+\frac{x^2}{m})^{\frac{m+1}{2}}} \mathrm{d}x$$

α / m	.10	.05	.025	.010	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012

このとき，

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/k}} \sim t(k)$$

自由度 k の t 分布： $t(k)$

t 分布 $\Longrightarrow$ 形状は自由度に依存する (図 6.3, P.97)

そのため，上側確率 0.10, 0.05, 0.025, 0.010, 0.005 の値のみが付表 3 になっている。

自由度もいくつか限定されている。

正規分布より裾野の広い分布 (図 6.3)

k が大きくなると，$t(k)$ は $N(0, 1)$ に近づく。

$\Longrightarrow$ **付表 3 (P.253) の** $m = \infty$ **の数値を付表 1 の下の表 (P.251) と比較**

例： $T \sim t(10)$ **のとき，**

$P(|T| > 3.169) = 0.01 \Longrightarrow$ **付表 3 (P.253)，図 6.4 (P.97)**

すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ **について，** $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ **で，**

しかも， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **は互いに独立である**

と仮定する。

1. **定理 6.5：標本平均の標本分布 (P.97)：**

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

自由度 $n-1$ の t 分布

ただし，

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

とする。

証明：

すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ **について，** $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ **で，**

しかも， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **は互いに独立である**

と仮定すると，

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

となる。標準化によって，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

を得る。

一方，定理 6.3 (P.94) から，

$$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

となる。

Z と U は独立となる。(証明略)

したがって，

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/(n-1)}} \sim t(n-1)$$

$$= \frac{\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \Big/ n-1}}$$

$$= \frac{\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}}{\dfrac{S}{\sigma}}$$

$$= \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

なので，

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

を得る。

まとめ，

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1) \qquad \Longrightarrow \textbf{ (5.4) あたり (P.73)}$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n - 1) \qquad \Longrightarrow \textbf{ 定理 6.5 (P.97)}$$

7　推定 (P.105)

ある母集団から標本数 n の独立な標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が抽出されたとき，これを用いて母数 (パラメータ) に対する統計的推測を行うことができる。

母平均 μ，母分散 σ^2 のような母集団の特性を表すものを母数 (パラメータ) と呼ぶ。

統計的推測とは，

1. 推定 (特に，点推定と呼ぶ) $\Longrightarrow$ 母数をある一つの値で推定すること
2. 区間推定 $\Longrightarrow$ 母数の値がある区間内にあるとして区間を推定すること
3. 仮説検定

から成る。

1. 理論標本，理論観測値

   $\Longrightarrow X_1, X_2, \cdots, X_n$

2. 実現された標本，実現された観測値，実現値

   $\Longrightarrow x_1, x_2, \cdots, x_n$

7.1　統計量，推定量，推定値 (P.106)

1. 理論観測値 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の関数 $\Longrightarrow$ 統計量

2. 母数の推定に使われる統計量 $\Longrightarrow$ μ の推定量

   (a) $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は μ の推定量

   (b) $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ は σ^2 の推定量

3. 実現された標本を用いて実際に計算された推定量の値 $\Longrightarrow$ 推定値

   (a) $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ は μ の推定値

   (b) $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ は σ^2 の推定値

4. μ や σ^2 の推定量の候補は無数に考えられる。