7.2　推定量の望ましい性質 (P.108)

1. **不偏性 (P.108)：**

   ある母集団のある母数 θ に対して，θ の推定量として $\hat{\theta}$ を考える。

   (すなわち，$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ となる)

   このとき，

$$\mathbf{E}(\hat{\theta}) = \theta$$

   となるとき，$\hat{\theta}$ は θ の不偏推定量であると言う。

   $\hat{\theta}$ は不偏性を持つと言う。

   $\mathbf{E}(\hat{\theta}) - \theta$ は偏りと定義される。

(a) **不偏推定量の実現値を不偏推定値と呼ぶ。**

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \Longrightarrow$ **不偏推定量**

$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \Longrightarrow$ **不偏推定値**

(b) **標本平均** $\overline{X}$ **は** μ **の不偏推定量である。**

証明：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\overline{X}) &= \mathbf{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(X_i) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu \\ &= \mu\end{aligned}$$

このように， $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu$ **なので，標本平均** $\overline{X}$ **は** μ **の不偏推定量となる。**

(c) 標本分散 S^2 は σ^2 の不偏推定量である。

証明：

準備として，以下の計算を行う。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}((X_i - \mu) - (\overline{X} - \mu))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)(\overline{X} - \mu) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - \mu)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\overline{X} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - \mu)^2
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2n(\overline{X} - \mu)^2 + n(\overline{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\overline{X} - \mu)^2$$

途中で，$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = n(\overline{X} - \mu)$ に注意せよ。

上の式を代入して，計算すると，

$$\mathbf{E}(S^2)$$

$$= \mathbf{E}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2)$$

$$= \frac{1}{n-1}\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\Big)$$

$$= \frac{1}{n-1}\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\overline{X} - \mu)^2\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i-\mu)^2 - n\mathbf{E}(\overline{X}-\mu)^2\Big) \\
&= \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\Big) \\
&= \frac{1}{n-1}(n\sigma^2-\sigma^2) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

となる。途中で，$\mathrm{E}(X_i-\mu)^2=\sigma^2$, $\mathrm{E}(\overline{X}-\mu)^2=\sigma^2/n$ (定理 4.9，P.62) に注意せよ。

このように，$\mathrm{E}(S^2)=\sigma^2$ なので，標本分散 S^2 は σ^2 の不偏推定量となる。

2. 一致性 (P.110)：

ある母数 θ について推定量 $\hat{\theta}$ を考える。n 個の標本から構成された推定量を $\hat{\theta}^{(n)}$ と定義する。

数列 $\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}, \cdots, \hat{\theta}^{(n)}, \cdots$ を考える。

十分大きな n について，$\hat{\theta}^{(n)}$ が θ に確率的に収束するとき，$\hat{\theta}$ は θ の一致推定量であると言う。

$$\mathbf{plim}_{n\to\infty}\,\hat{\theta} = \theta$$

と表現する。

(a) $\hat{\theta}$ が θ 一致推定量であるための一つの十分条件は，

$$\mathbf{E}(\hat{\theta}) = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{V}(\hat{\theta}) = 0$$

が成り立つことである。

(b) μ の推定量 $\overline{X}$ を調べる。

$$\mathbf{E}(\overline{X}) = \mu$$

$$\mathbf{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

となる。$n \to \infty$ のとき，

$$\mathbf{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow 0$$

となるので，$\overline{X}$ は μ の一致推定量であると言える。

3. 有効性 (P.111)：

ある母数 θ に対して，$\hat{\theta}_1$ と $\hat{\theta}_2$ の 2 つの不偏推定量を考える。

このとき，$\mathbf{V}(\hat{\theta}_1) < \mathbf{V}(\hat{\theta}_2)$ が成り立つとき，$\hat{\theta}_1$ は $\hat{\theta}_2$ より有効であると言う。

ある母数 θ に対して，可能なすべての不偏推定量を考え，$\hat{\theta}$ が最も小さな分散を持つ不偏推定量であるとする ($\hat{\theta}$ を θ の不偏推定量の中で最も小さい分散を持つ推定量とする)。

このとき，$\hat{\theta}$ を有効推定量 (最小分散不偏推定量) と言う。

(a) 簡単化のために $n = 3$ の場合を考える。

X_1, X_2, X_3 は互いに独立に平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うと仮定する。

すなわち，$i = 1, 2, 3$ について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

μ の推定量を 2 つ考える。

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ &= \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3\end{aligned}$$

$$\widetilde{X} = \frac{1}{4}X_1 + \frac{2}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3$$

不偏性のチェック：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\overline{X}) &= \frac{1}{3}\mathbf{E}(X_1) + \frac{1}{3}\mathbf{E}(X_2) + \frac{1}{3}\mathbf{E}(X_3) \\ &= \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu \\ &= \mu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\widetilde{X}) &= \frac{1}{4}\mathbf{E}(X_1) + \frac{2}{4}\mathbf{E}(X_2) + \frac{1}{4}\mathbf{E}(X_3) \\ &= \frac{1}{4}\mu + \frac{2}{4}\mu + \frac{1}{4}\mu \\ &= \mu\end{aligned}$$

よって，$\overline{X}, \widetilde{X}$ 共に μ の不偏推定量である。

分散は，

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\overline{X}) &= \mathbf{V}(\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3) \\
&= \mathbf{V}(\frac{1}{3}X_1) + \mathbf{V}(\frac{1}{3}X_2) + \mathbf{V}(\frac{1}{3}X_3) \\
&= \frac{1}{9}\mathbf{V}(X_1) + \frac{1}{9}\mathbf{V}(X_2) + \frac{1}{9}\mathbf{V}(X_3) \\
&= \frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\widetilde{X}) &= \mathbf{V}(\frac{1}{4}X_1 + \frac{2}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3) \\
&= \mathbf{V}(\frac{1}{4}X_1) + \mathbf{V}(\frac{2}{4}X_2) + \mathbf{V}(\frac{1}{4}X_3) \\
&= \frac{1}{16}\mathbf{V}(X_1) + \frac{4}{16}\mathbf{V}(X_2) + \frac{1}{16}\mathbf{V}(X_3) \\
&= \frac{1}{16}\sigma^2 + \frac{4}{16}\sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{6}{16}\sigma^2$$

したがって，$\mathrm{V}(\overline{X}) < \mathrm{V}(\widetilde{X})$ となり，$\overline{X}$ が $\widetilde{X}$ より有効であることが分かる。

(b) ある母集団から標本数 n の独立な標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は，それぞれ，平均 μ，分散 σ^2 の分布を持つものとする。

$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ は最も小さな分散を持つ不偏推定量となる。

$\Longrightarrow$ 有効推定量

母平均 μ の推定量である標本平均 $\overline{X}$ は，不偏性，一致性，有効性という 3 つの望ましい性質を持っている。