7.3 区間推定 (P.113)

4 つの区間推定

1. 母平均 μ の区間推定

   (a) 正規母集団の場合

   - 母分散が既知

   - 母分散が未知

   (b) 正規母集団でない場合 (大標本，すなわち，n が大きいとき)

   - 母分散が既知

   - 母分散が未知

2. **母分散 σ^2 の区間推定 (正規母集団の場合) *** 時間に余裕がなければ省略 *****

3. **母比率の区間推定**

7.3.1 平均の区間推定 (正規母集団，母分散が既知, P.113)

母分散 σ^2 が既知と仮定する。

$\Longrightarrow$ **σ^2 を推定する必要なし。**

$\Longrightarrow$ **正規分布の利用**

大きさ n の無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ **について，** $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$**，しかも，互いに独立と仮定する。**

このとき，

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

したがって，標準化によって，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

となる。

標準正規分布表 (P.251) から， α **を与えたもとで，**

$$P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

となる $z_{\alpha/2}$ **の値を見つける。**

例：

$\alpha = 0.05$ **のとき，**

$P(|Z| < 1.960) = 0.95$ **により，** $z_{\alpha/2} = 1.960$

$\alpha = 0.10$ **のとき，**

$P(|Z| < 1.645) = 0.90$ **により，** $z_{\alpha/2} = 1.645$

$$P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

母平均 μ **が区間** $(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ **に含まれる確率は** $1 - \alpha$ **である。**

推定量 $\overline{X}$ **をその推定値** $\overline{x}$ **で置き換えて，区間** $(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$\Longrightarrow$ **信頼係数 (信頼度)** $1 - \alpha$ **の母平均** μ **の信頼区間という。**

$\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$ **信頼区間の下限**

$\overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$ **信頼区間の上限と呼ぶ。**

ただし， $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ **とする。**

例題 7.1 (P.114)：　正規母集団 $N(\mu, 2^2)$ から大きさ 16 の標本をとって標本平均を計算したところ，$\overline{x} = 3.2$ であった。信頼係数 0.95 の μ の信頼区間は？

解答：　$Z \sim N(0, 1)$ ，$\alpha = 0.05$ **のとき，**

$P(|Z| > z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ **となるので，** $z_{\alpha/2} = 1.96$ **である。**

$n = 16$

信頼係数 $1 - \alpha$ **の** μ **の信頼区間は** $(\overline{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ **なので，**

$(3.2 - 1.96\dfrac{2}{\sqrt{16}}, 3.2 + 1.96\dfrac{2}{\sqrt{16}})$，

すなわち，信頼係数 0.95 の μ **の信頼区間は (2.22, 4.18) である。**

問題 7.1 (P.122)：　**すべての** $i = 1, 2, \cdots, n$ **について，** $X_i \sim N(\mu, 3^2)$

標本の大きさ $n = 25$

標本平均 $\overline{x} = 8.2$

信頼係数 0.9, 0.95 の μ **の信頼区間は？**

解答：　$Z \sim N(0, 1)$ **，** $\alpha = 0.05$ **のとき，**

$P(|Z| > z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ **となるので，** $z_{\alpha/2} = 1.96$ **である。** $\alpha = 0.10$ **のとき，**

$z_{\alpha/2} = 1.645$ **である。**

信頼係数 $1 - \alpha$ **の** μ **の信頼区間は** $(\overline{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ **なので，**

信頼係数 0.95 の μ の信頼区間は

$$(8.2 - 1.96\frac{3}{\sqrt{25}}, 8.2 + 1.96\frac{3}{\sqrt{25}}),$$

すなわち，(7.024, 9.376) である。

信頼係数 0.90 の μ の信頼区間は

$$(8.2 - 1.645\frac{3}{\sqrt{25}}, 8.2 + 1.645\frac{3}{\sqrt{25}}),$$

すなわち，(7.213, 9.187) である。

7.3.2　平均の区間推定 (正規母集団，母分散が未知, P.115)

母分散 σ^2 が未知と仮定する。

$\Longrightarrow \sigma^2$ を推定する必要あり。

$\Longrightarrow t$ 分布の利用

大きさ n の無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$，しかも，互いに独立と仮定する。

このとき，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

となる。

σ^2 をその推定量 S^2 で置き換えると，

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

となる。(定理 6.5，P.97)

t 分布表 (P.253) から，n と α を与えたもとで，

$$P(|T| < t_{\alpha/2}(n-1)) = 1 - \alpha$$

となる $t_{\alpha/2}(n-1)$ の値を見つける。

例：

$n = 11, \alpha = 0.05$ のとき，

$P(|T| < 2.228) = 0.95$ により，$t_{\alpha/2}(10) = 2.228$

$$P(|T| < t_{\alpha/2}(n-1)) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

母平均 μ が区間

$\left(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$ に含まれる確率は $1 - \alpha$ である。

推定量 $\overline{X}$，S^2 をその推定値 $\overline{x}$，s^2 で置き換えて，区間

$$(\overline{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

$\Longrightarrow$ **信頼係数 (信頼度)** $1-\alpha$ **の母平均** μ **の信頼区間 (母分散未知の場合) という。**

$\overline{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$ **信頼区間の下限**

$\overline{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$ **信頼区間の上限と呼ぶ。**

ただし， $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$**，** $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ **とする。**

例題 7.2 (P.116)：　正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ **から大きさ 9 の標本をとって標本平均と標本標準偏差を計算した。**$\overline{x} = 3.2$, $s = 2.1$ **であった。信頼係数 0.95 の** μ **の信頼区間は？**

解答：　$n = 9, \alpha = 0.05$ **のとき，**

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

となるのは，$t_{\alpha/2}(n-1) = 2.306$ **である。**

信頼係数 $1 - \alpha$ **の** μ **の信頼区間は，**

$$(\overline{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

となるので，

$$(3.2 - 2.306\frac{2.1}{\sqrt{9}}, 3.2 + 2.306\frac{2.1}{\sqrt{9}})$$

を得る。