信頼係数 0.95 の μ の信頼区間は **(1.586, 4.814)** である。

問題 7.2 (P.122)： 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から大きさ **12** の標本をとって標本平均と標本標準偏差を計算した。$\overline{x} = 10.5$, $s = 3.6$ であった。信頼係数 **0.90, 0.95** の μ の信頼区間は？

解答： $n = 12$ のとき，

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

となるのは，$\alpha = 0.10$ で $t_{\alpha/2}(n-1) = 1.796$，$\alpha = 0.05$ で $t_{\alpha/2}(n-1) = 2.201$，である。

信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間は，

$$(\overline{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

となるので，

信頼係数 0.90 **の** μ **の信頼区間は** $(10.5 - 1.796\frac{3.6}{\sqrt{12}}, 10.5 + 1.796\frac{3.6}{\sqrt{12}})$

すなわち，(8.634, 12.366) を得る。

信頼係数 0.95 **の** μ **の信頼区間は** $(10.5 - 2.201\frac{3.6}{\sqrt{12}}, 10.5 + 2.201\frac{3.6}{\sqrt{12}})$

すなわち，(8.213, 12.787) を得る。

問題 7.4 (P.123)：　2009 年の外国為替相場の対前期比が正規分布に従うと仮定して，その平均の信頼係数 0.9, 0.95 の信頼区間は？

解答： $n = 12$ で，データから $\overline{x}$, s^2 を計算。

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \frac{1}{12}(-1.0 + 2.3 + 5.8 + 1.2 - 2.7 + 0.2$$

$$- 2.1 + 0.4 - 3.5 - 1.3 - 1.2 + 0.4)$$

$$= -0.125$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{11}\Big(((-1.0)^2 + 2.3^2 + 5.8^2 + 1.2^2 + (-2.7)^2 + 0.2^2 \\
&+ (-2.1)^2 + 0.4^2 + (-3.5)^2 + (-1.3)^2 + (-1.2)^2 + 0.4^2) \\
&- 12 \times (-0.125)^2\Big) \\
&= 2.3913^2
\end{aligned}
$$

$s = 2.3913$

$n = 12$ のとき，

$\alpha = 0.10$ で $t_{\alpha/2}(n-1) = 1.7959$，

$\alpha = 0.05$ で $t_{\alpha/2}(n-1) = 2.2010$，

である。

信頼係数 $1-\alpha$ **の** μ **の信頼区間は，**

$$(\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

となるので，

信頼係数 0.90 **の** μ **の信頼区間は**

$$(-0.125-1.7959\frac{2.3913}{\sqrt{12}}, -0.125+1.7959\frac{2.3913}{\sqrt{12}})$$

すなわち，$(-1.365,\ 1.115)$ **を得る。**

信頼係数 0.95 **の** μ **の信頼区間は**

$$(-0.125-2.2010\frac{2.3913}{\sqrt{12}}, -0.125+2.2010\frac{2.3913}{\sqrt{12}})$$

すなわち，$(-1.644,\ 1.394)$ を得る。

母平均 μ の区間推定 (非正規母集団，大標本のとき): n **が大きいとき，正規近似 $\Longrightarrow$ 中心極限定理 (定理 6.1, P.90)**

(中心極限定理の復習)

大きさ n の無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

すべての i について，$\mathrm{E}(X_i) = \mu$，$\mathrm{V}(X_i) = \sigma^2$ とする。

標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ を考える。

n が大きいとき ($n \geq 100$)，

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1)$$

を得る。これは，

$$\frac{\overline{X} - \mathbf{E}(\overline{X})}{\sqrt{\mathbf{V}(\overline{X})}} \longrightarrow N(0, 1)$$

とも書き直すことが出来る。

(X_i の分布の形状を必要としないというところがポイント)

(注意)

$\overline{X}$ の平均，分散は，

$$\mathbf{E}(\overline{X}) = \mu, \qquad \mathbf{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

となる。$\Longrightarrow$ 定理 4.9 (P.62)

- 母分散 σ^2 が既知のとき：

  n が大きいとき $(n \geq 100)$，

  $$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1)$$

  なので，$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ とすると，近似的に，

  $$P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

となり，

$$P(|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

を得る。

したがって，

$$P(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$

$\overline{X}$ を $\overline{x}$ で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間は，

$$(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

が近似的に用いられる。

- **母分散 σ^2 が未知のとき：**

さらに，n が大きいとき $(n \geq 100)$，母分散 σ^2 をその不偏推定量 S^2 で置き換えて，

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0,1)$$

を得ることができる (証明略)。

よって，$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ とすると，近似的に，

$$P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

となり，

$$P(|\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

を得る。

したがって，

$$P(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$\overline{X}$, S^2 を $\overline{x}$, s^2 で置き換えて，信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間は，

$$(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}})$$

となる。

問題 7.3 (P.122)：　勤労者世帯の年間収入の全国平均を調べるため，4271 世帯の年間収入を調査したところ，平均が 712 万円，標準偏差が 357.4 万円であった。年間収入の全国平均の信頼係数 0.9, 0.95 の信頼区間は？

解答：　問題の再解釈 $\Longrightarrow$

平均 μ**，分散** σ^2 **から大きさ 4271 の標本をとって標本平均と標本標準偏差を計算した。** $\overline{x} = 712$, $s = 357.4$ **であった。信頼係数 0.90, 0.95 の** μ **の信頼区間は？**

$n = 4271$ **のとき，** t **分布の正規近似によって，**

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

となるのは， $\alpha = 0.10$ **で** $z_{\alpha/2} = 1.645$**，** $\alpha = 0.05$ **で** $z_{\alpha/2} = 1.960$**，である。**

n **が大きいとき，信頼係数** $1 - \alpha$ **の** μ **の信頼区間は，**

$$(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}})$$

となるので，

信頼係数 0.90 **の** μ **の信頼区間は**

$$\left(712 - 1.645\frac{357.4}{\sqrt{4271}},\ 712 + 1.645\frac{357.4}{\sqrt{4271}}\right)$$

すなわち，(601.5, 822.5) を得る。

信頼係数 0.95 **の** μ **の信頼区間は**

$$\left(712 - 1.960\frac{357.4}{\sqrt{4271}},\ 712 + 1.960\frac{357.4}{\sqrt{4271}}\right)$$

すなわち，(580.4, 843.6) を得る。

7.3.3　分散の区間推定 (P.117, 時間に余裕がなければ省略)

大きさ n **の無作為標本** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **は互いに独立であり，**