すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ **について，** $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ **と仮定する (正規母集団の仮定)。**

このとき，定理 6.3 (P.94) より，

$$U = \sum_{i=1}^{n} (\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

ただし， $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ **(標本不偏分散) とする。**

1. **自由度** $n-1$ **のカイ 2 乗分布の下側確率，上側確率が** $\alpha/2$ **となる点を，それぞれ** $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$**，** $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ **とする。**

   $\Longrightarrow$ **図 7.4 (P.118)**

2. $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

$\Longrightarrow$ **下側確率が** $\alpha/2$ **となる点**

$\Longrightarrow$ **上側確率が** $1-\alpha/2$ **となる点**

3. $P(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < U < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)) = 1-\alpha$

$$P(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)) = 1-\alpha$$

$$P(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}) = 1-\alpha$$

4. **したがって，信頼係数** $1-\alpha$ **の** σ^2 **の信頼区間は，推定量** S^2 **をその推定値** s^2 **で置き換えて，**

$$(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$$

となる。ただし， $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ **とする。**

例題 7.3 (P.118)：　**正規母集団** $N(\mu, \sigma^2)$ **から大きさ 20 の標本をとって標本平均と標本不偏分散を計算した。**$s^2 = 17.2$ **であった。信頼係数 0.95 の** σ^2 **の信頼区間は？**

解答：　$n = 20, \alpha = 0.05$ **のとき，**

$$P(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)) = 1 - \alpha$$

となるのは，付表 2 (P.246) より，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = 8.90655, \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = 32.8523$ **である。**

信頼係数 $1-\alpha$ **の** σ^2 **の信頼区間は，**

$$(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$$

となる。

よって，信頼係数 0.95 の σ^2 の信頼区間は，

$$(\frac{(20-1)17.2}{32.8523}, \frac{(20-1)17.2}{8.90655})$$

となる。

すなわち，(9.948, 36.690) となる。

問題 7.5 (P.123)：　正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から大きさ 12 の標本をとって標本平均と標本不偏分散を計算した。$s^2 = 2.8$ であった。信頼係数 0.90, 0.95 の σ^2 の信頼区間は？

解答：　$n = 12$ で，

$$P(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)) = 1-\alpha$$

となるのは，付表 2 (P.252) より，

$\alpha = 0.10$ のとき，

$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = 4.57481, \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = 19.6751$，

$\alpha = 0.05$ のとき，

$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = 3.81575, \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = 21.9200$，

である。

信頼係数 $1-\alpha$ の σ^2 の信頼区間は，

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

となる。

よって，信頼係数 0.90 の σ^2 の信頼区間は，

$$\left(\frac{(12-1)2.8}{19.6751}, \frac{(12-1)2.8}{4.57481}\right)$$

となる。

すなわち，(1.565, 6.732) となる。

信頼係数 0.95 の σ^2 の信頼区間は，

$$\left(\frac{(12-1)2.8}{21.9200}, \frac{(12-1)2.8}{3.81575}\right)$$

となる。

すなわち，(1.405, 8.071) となる。

問題 7.6 (P.123)：　問題 7.4 (P.123) のデータを使って，2009 年の外国為替相場の対前年比の分散の信頼係数 0.9, 0.95 の信頼区間は？

解答：　$\overline{x} = -0.125$, $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 2.3913^2$ **を問題 7.4 より得た。**

$n = 12$ **で，**

$$P(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)) = 1 - \alpha$$

となるのは，付表 2 (P.252) より，

$\alpha = 0.10$ **のとき，**

$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = 4.57, \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = 19.68$**，**

$\alpha = 0.05$ のとき，

$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = 3.82, \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = 21.92$，

である。

信頼係数 $1-\alpha$ の σ^2 の信頼区間は，

$$(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$$

となる。

よって，信頼係数 0.90 の σ^2 の信頼区間は，

$$(\frac{(12-1)2.3913^2}{19.68}, \frac{(12-1)2.3913^2}{4.57})$$

となる。

すなわち，(3.196, 13.764) となる。

信頼係数 0.95 の σ^2 の信頼区間は，

$$\left(\frac{(12-1)2.3913^2}{21.92}, \frac{(12-1)2.3913^2}{3.82}\right)$$

となる。

すなわち，(2.870, 16.466) となる。

7.3.4　比率の区間推定 (P.118)

n 回の試行 (実験)

i 回目の試行で，

成功のとき $X_i = 1$，**失敗のとき** $X_i = 0$ **とする。**

$$R = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

とする。

n **回の実験で成功する回数** $= R$

1 回の試行で成功する確率 $= p \implies P(X_i = 1) = p$

X_i **の平均・分散を求める。**

$$\mathbf{E}(X_i) = 1 \times P(X_i = 1) + 0 \times P(X_i = 0) = p$$

$$\mathbf{V}(X_i) = (1 - p)^2 \times P(X_i = 1)$$

$$+(0-p)^2 \times P(X_i = 0)$$

$$= p(1-p)$$

離散型確率変数の平均・分散の求め方は，P.53，54 の (4.12)，(4.14) を参考に。

一方，

比率 p の推定量 $\overline{X}$ を，

$$\overline{X} = \frac{R}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad (= \hat{p})$$

とする。テキストでは，$\overline{X}$ を $\hat{p}$ としている。

すなわち，

$$\mathbf{E}(X_1) = \mathbf{E}(X_2) = \cdots = \mathbf{E}(X_n) = p$$

$$\mathbf{V}(X_1) = \mathbf{V}(X_2) = \cdots = \mathbf{V}(X_n) = p(1-p)$$

$\overline{X}$ は n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本平均である。

$\Longrightarrow$ 中心極限定理 (定理 6.1, P.90) の適用

$\mathbf{E}(\overline{X}) = p$, $\mathbf{V}(\overline{X}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$ なので，n が大きいとき，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mathbf{E}(\overline{X})}{\sqrt{\mathbf{V}(\overline{X})}} = \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0, 1)$$

として近似できる。

さらに，分散 $\mathbf{V}(\overline{X}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$ は未知なので，p を $\overline{X}$ で置き換える。

よって，$\overline{X}$ の標本分布は，n が大きいとき，

$$Z = \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\overline{X}(1 - \overline{X})/n}} \sim N(0, 1)$$

として近似する。

信頼区間：

α を与えたとき，

$$P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

となる $z_{\alpha/2}$ を付表 1 (P.251) から見つける。

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} < p < \overline{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\right) = 1-\alpha$$

よって，信頼係数 $1-\alpha$ の p の信頼区間は，

$\overline{X}$ をその実現値 $\overline{x}$ で置き換えて，

$$(\overline{x} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}})$$

となる。ただし，テキストでは，

$$(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$$

$\Longrightarrow$ **P.120**

例題 7.4 (P.120)：　表 1.6 (P.10) から，4271 世帯の調査で，2008 年度の勤労者世帯の年間収入が 800 万以上の比率の推定値は 0.312 だった。信頼係数 0.95 の母比率の信頼区間は？

解答：　信頼係数 $1-\alpha$ の p の信頼区間は，

$$(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$$

となる。

α **を与えたとき，**

$$P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

となる $z_{\alpha/2}$ **を付表 1 (P.251) から見つける。**

$\alpha = 0.05$ **のとき，**

$z_{\alpha/2} = 1.96$

$n = 4271, \hat{p} = 0.312$ なので，信頼係数 0.95 の p の信頼区間は，

$$(0.312 - 1.96\sqrt{\frac{0.312(1-0.312)}{4271}},$$

$$0.312 + 1.96\sqrt{\frac{0.312(1-0.312)}{4271}})$$

すなわち，(0.298, 0.326) となる。

問題 7.7 (P.123)：　インスタントラーメンを美味しいとおもうかどうかの調査。100 人中 67 人が美味しいと答えた。美味しいとおもう人の比率の信頼係数 0.90, 0.95 の信頼区間は？

解答：　信頼係数 $1-\alpha$ **の** p **の信頼区間は，**

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

となる。

α **を与えたとき，**

$$P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

となる $z_{\alpha/2}$ **を付表 1 (P.251) から見つける。**

$\alpha = 0.10$ **のとき，**

$z_{\alpha/2} = 1.645$

$\alpha = 0.05$ **のとき，**

$z_{\alpha/2} = 1.960$

$n = 100$**,** $\hat{p} = 0.67$ **なので，信頼係数 0.90 の** p **の信頼区間は，**

$$(0.67 - 1.645\sqrt{\frac{0.67(1-0.67)}{100}},$$

$$0.67 + 1.645\sqrt{\frac{0.67(1-0.67)}{100}})$$

すなわち，(0.593, 0.747) となる。

信頼係数 0.95 の p **の信頼区間は，**

$$(0.67 - 1.960\sqrt{\frac{0.67(1-0.67)}{100}},$$

$$0.67 + 1.960\sqrt{\frac{0.67(1-0.67)}{100}})$$

すなわち，(0.578, 0.762) となる。

8　仮説検定 (P.127)

統計的推測の方法

1. 推定

(a) 点推定：

- **母平均 μ の推定量 $\overline{X}$，その推定値 $\overline{x}$**

・**母分散 σ^2 の推定量 S^2，その推定値 s^2**

・**母比率 p の推定量 $\overline{X}$，その推定値 $\overline{x}$**

(b) 区間推定：

・**母平均 μ の区間推定**

(i) 正規母集団の場合

○ **母分散 σ^2 が既知のとき：**

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間：

$$(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

○ **母分散 σ^2 が未知のとき：**

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間：

$$(\overline{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},$$
$$\overline{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

(ii) 正規母集団でない場合 (大標本，すなわち，n が大きいとき)

○ **母分散 σ^2 が既知のとき：**

無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ **について，**$X_i \sim (\mu, \sigma^2)$ **とする。このとき，**

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$\Longrightarrow$ **中心極限定理 (定理 6.1, P.90)**

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

信頼係数 $1-\alpha$ **の** μ **の信頼区間：**

$$(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

○ **母分散** σ^2 **が未知のとき：**

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

について，σ^2 **を** S^2 **で置き換えて，**

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

と近似出来るので，

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間：

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

・**母分散 σ^2 の区間推定 (正規母集団の仮定) *** 時間に余裕がなければ省略 *****

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$P\Big(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\Big) = 1-\alpha$$

信頼係数 $1-\alpha$ の σ^2 の信頼区間：

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

• **母比率 p の区間推定**

$$\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0, 1)$$

分母の p をその推定量 $\overline{X}$ で置き換えて，

$$\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}} \sim N(0, 1)$$

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

信頼係数 $1-\alpha$ の p の信頼区間 ($\overline{X}$ を $\overline{x}$ で置き換える)：

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}},\right.$$

$$\left.\overline{x} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\right)$$

2. **仮説検定** $\Longrightarrow$ **母数に関する仮説を検定**

もっとまとめると，

区間推定の種類

1. **母平均** μ **の区間推定**

   (a) **正規母集団の場合**

      i. **母分散** σ^2 **は既知** $\Longrightarrow N(0,1)$

      ii. **母分散** σ^2 **は未知** $\Longrightarrow t(n-1)$

   (b) **非正規母集団の場合 (大標本，すなわち，**n **が大きいとき)**

i. **母分散** σ^2 **は既知** $\Longrightarrow N(0,1)$

ii. **母分散** σ^2 **は未知** $\Longrightarrow N(0,1)$

2. **母分散 (σ^2) の区間推定 (正規母集団)** $\Longrightarrow \chi^2(n-1)$

   ***** 時間に余裕がなければ省略 *****

3. **母比率** p **の区間推定** $\Longrightarrow N(0,1)$

8.1　2 種類の誤り (P.138)

検定しようとする仮説 $\Longrightarrow$ **帰無仮説** H_0

帰無仮説が正しくないときに成り立つ仮説 $\Longrightarrow$ **対立仮説** H_1