	H_0 は正しい	H_0 は正しくない
H_0 採択	正しい判定	第 2 種の誤り (確率 β)
H_0 棄却	第 1 種の誤り (確率 α = 有意水準)	正しい判定 ($1-\beta$ = 検出力)

8.2　検定の手続き (P.138)

1. 母数について帰無仮説 H_0 を立てる。

2. ある適当な統計量を考えて，H_0 が正しいときにこの統計量が従う分布を導く。

   ある適当な統計量 $\Longrightarrow$ 検定統計量

3. 実際の標本 (データ) からこの統計量の値 (統計値) を計算する。

4. 統計量の分布と統計値とを比較する。

この統計値が分布の端にあれば，H_0 は起こりにくいと判定され，H_0 を棄却する。

起こりにくいとして H_0 を棄却する領域 $\Longrightarrow$ 棄却域 R (reject の意味)

起こり得るとして H_0 を採択する領域 $\Longrightarrow$ 採択域 A (accept の意味)

検定統計量 $T = f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

第 1 種の誤りの確率 = 有意水準 α (H_0 が正しいにもかかわらず，H_0 を棄却する確率)

$$P(f(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in R | H_0 \text{ が正しい}) = \alpha$$

第 2 種の誤りの確率 $= \beta$ **(**H_0 **が正しくないにもかかわらず，**H_0 **を採択する確率)**

$$P(f(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in A | H_0 \text{ が正しくない}) = \beta$$

検出力 $= 1 - \beta$ **(**H_0 **が正しくないとき，**H_0 **を棄却する確率)**

$$P(f(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in R | H_0 \text{ が正しくない}) = 1 - \beta$$

有意水準： $\alpha = 0.05, 0.01$ **を選ぶ。**

検定の種類

1. 母平均 μ **の検定**

(a) **正規母集団の場合**

i. **母分散** σ^2 **は既知** $\Longrightarrow N(0, 1)$

ii. **母分散** σ^2 **は未知** $\Longrightarrow t(n-1)$

(b) **非正規母集団の場合 (大標本，すなわち，**n **が大きいとき)** $\Longrightarrow N(0, 1)$

2. **2 つの標本の母平均の差** $(H_0: \ \mu_1 = \mu_2)$ **の検定**

(a) **正規母集団の場合**

i. σ_1^2 **と** σ_2^2 **は既知** $\Longrightarrow N(0, 1)$

ii. σ_1^2 **と** σ_2^2 **は未知，大標本** $(n_1, n_2$ **が大きい) とき** $\Longrightarrow N(0, 1)$

(小標本の場合は検定不可能，検定統計量の分布を導出できないため)

(b) **非正規母集団の場合 (大標本，すなわち，**n_1, n_2 **が大きいとき)** $\Longrightarrow N(0, 1)$

3. **母比率** p **の検定** $\Longrightarrow N(0,1)$

8.3　片側検定 (正規母集団，母平均の検定，母分散既知, P.132)

正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ **からの大きさ** n **の無作為標本** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **があるものとする。**

母平均 μ **の推定量は** $\overline{X}$ **なので，** $\overline{X}$ **の分布を求める。**

正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ **からの大きさ** n **の無作為標本** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **の標本平均** $\overline{X}$ **の分布は，分散** σ^2 **を既知としたとき，**

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

となり，標準化によって，

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

となる。(P.91 真中の段落)

● ケース 1 (片側検定)

帰無仮説　$H_0 : \mu = \mu_0$

対立仮説　$H_1 : \mu < \mu_0$

ただし，μ_0 はある定数とする。

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

なので，

$$P(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -z_\alpha) = \alpha$$

となる。

このとき，$\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし $\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -z_\alpha$ ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ **有意水準** α **で，母平均** μ **は** μ_0 **よりも小さいと判断する。**

● **ケース 2 (片側検定)**

帰無仮説　$H_0 : \mu = \mu_0$

対立仮説　$H_1 : \mu > \mu_0$

の検定を考える。

帰無仮説 H_0 **が正しいもとで，**

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

なので，

$$P(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha) = \alpha$$

となる。

このとき，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$ ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ は μ_0 よりも大きいと判断する。

8.4　両側検定 (正規母集団，母平均の検定，母分散既知, P.132)

● ケース 3 (両側検定)

帰無仮説　$H_0 : \mu = \mu_0$

対立仮説　$H_1 : \mu \neq \mu_0$

の検定を考える。

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

なので，

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}\right) = \alpha$$

となる。

このとき，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし

$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\alpha/2}$ または $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha/2}$

ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ と μ_0 は異なると判断する。

両側検定 $\Longrightarrow$ 区間推定に密接に関連している。

信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間は，

$$(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

として表される。

この区間に μ_0 が含まれなければ，帰無仮説 H_0 が棄却される。

例：　関東地方の世帯の収入の母集団の分布は，平均 616 万円，標準偏差 40 万円の正規分布であることがあらかじめ分かっているものとする。さらに，標準偏差は地域によって差が

ないものと仮定する。近畿地方の 256 世帯を無作為に抽出して，平均収入を計算したところ 608 万円だった。このとき，近畿地方の収入の母平均が関東地方の収入の母平均を下回っているかどうかを検定する。

解答：　近畿地方の収入の母平均を μ とすると，

帰無仮説 $H_0 : \mu = 616$

対立仮説 $H_1 : \mu < 616$

とおく。

第 i 番目の世帯は，

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

となる $(\sigma = 40^2)$**。標本平均** $\overline{X}$ **は，**

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

すなわち，

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

となる。$(\sigma^2 = 40^2$**,** $n = 256)$

帰無仮説 $H_0 : \mu = 616$，対立仮説 $H_1 : \mu < 616$ なので，

$$P\left(\frac{\overline{X} - 616}{40/\sqrt{256}} < -z_\alpha\right) = \alpha$$

したがって，$\dfrac{\overline{x} - 616}{40/\sqrt{256}} < -z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0 を棄却する。

$\alpha = 0.01$ とすると，

$$\frac{\overline{x} - 616}{40/\sqrt{256}}$$

$$= \frac{608 - 616}{40/\sqrt{256}}$$

$$= -3.2 < -z_\alpha = -2.326$$

なので，有意水準 0.01 で帰無仮説 H_0 を棄却する。

よって，近畿地方の収入の平均は関東地方の収入の平均より低いという仮説が支持される。

例：　全国の一世帯の収入の母集団の分布は，平均 604 万円，標準偏差 40 万円の正規分布であることがあらかじめ分かっているものとする。さらに，標準偏差は地域によって差がないものと仮定する。近畿地方の 256 世帯を無作為に抽出して，平均収入を計算したところ 608 万円だった。このとき，近畿地方の収入の母平均と全国の収入の母平均は差があるかどうかを検定する。

解答：　近畿地方の収入の母平均を μ とすると，

帰無仮説 $H_0 : \mu = 604$

対立仮説 $H_1 : \mu \neq 604$

とおく。

第 i 番目の世帯は，

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

となる $(\sigma = 40^2)$**。標本平均 $\overline{X}$ は，**

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

すなわち，

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

となる。$(\sigma^2 = 40^2$**,** $n = 256)$

帰無仮説 $H_0 : \mu = 604$，対立仮説 $H_1 : \mu \neq 604$ なので，

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - 604}{40/\sqrt{256}}\right| > z_{\alpha/2}\right) = \alpha$$

したがって，

$$\frac{\overline{x} - 604}{40/\sqrt{256}} < -z_{\alpha/2} \text{ または } \frac{\overline{x} - 604}{40/\sqrt{256}} > z_{\alpha/2}$$

のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0 を棄却する。

$\alpha = 0.05$ とすると，

$$\left|\frac{\overline{x} - 604}{40/\sqrt{256}}\right|$$

$$= \left|\frac{608 - 604}{40/\sqrt{256}}\right|$$

$= |1.6| < z_{\alpha/2} = 1.96$

なので，有意水準 0.05 で帰無仮説 H_0 **を採択する。**

よって，近畿地方の収入の平均は全国の収入の平均と同じであるという仮説が支持される。

問題 8.1 (P.155)：　ある洋服販売店は，何年もの間，週当たり平均 $\mu = 120$ **着，標準偏差** $\sigma = 20$ **着の紳士服を販売してきた。このたび，戦略的情報システム (SIS) を導入したところ，4 週間の平均で 135 着の売り上げがあった (標準偏差は変化していないものとする)。過去の売り上げと比べて売り上げが上がったかどうかを 1 %, 5 %, 10 % の有意水準を用いて検定せよ。**

解答：　一週間の売り上げを X_i とする。

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

ここでは $\sigma^2 = 20^2$**,** $n = 4$ **となる。**

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

帰無仮説 $H_0 : \mu = 120$

対立仮説 $H_1 : \mu > 120$

H_0 **のもとで，**

$$\frac{\overline{X} - 120}{20/\sqrt{4}} \sim N(0, 1)$$

$$P(\frac{\overline{X} - 120}{20/\sqrt{4}} > z_\alpha) = \alpha$$

$\alpha = 0.01$ **のとき，** $z_\alpha = 2.326$

$\alpha = 0.05$ **のとき，** $z_\alpha = 1.645$

$\alpha = 0.10$ **のとき，** $z_\alpha = 1.282$

$$\frac{\overline{x} - 120}{20/\sqrt{4}} = \frac{135 - 120}{20/\sqrt{4}} = 1.5 < z_{0.01} = 2.326$$

$\Longrightarrow$ **有意水準 0.01 で H_0 を採択する。新システムによって売り上げがあがったとは言えない。**

$$\frac{\overline{x} - 120}{20/\sqrt{4}} = \frac{135 - 120}{20/\sqrt{4}} = 1.5 < z_{0.05} = 1.645$$

$\Longrightarrow$ **有意水準 0.05 で H_0 を採択する。新システムによって売り上げがあがったとは言えない。**

$$\frac{\overline{x} - 120}{20/\sqrt{4}} = \frac{135 - 120}{20/\sqrt{4}} = 1.5 > z_{0.10} = 1.282$$

$\Longrightarrow$ **有意水準 0.10 で H_0 を棄却する。新システムによって売り上げがあがったと言える。**

問題 8.4 (P.156)：　『住宅調整調査』によると，ある年の新設住宅の 1 戸当たり平均床面積は 80.9 m^2 であった。東京都下の 100 戸の新設住宅の床面積は平均 62.5 m^2 であった。東京

都の住宅事情は悪いという仮説を検定する。ただし，標準偏差は全国と東京都で差がなく 18 m^2 であることが分かっているものとせよ。

解答： n **戸の東京都の住宅の床面積** $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

となる。

帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$

対立仮説 $H_1 : \mu < \mu_0$

帰無仮説 H_0 **が正しいもとで，**

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

なので，

$$P(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -z_\alpha) = \alpha$$

となる。

もし $\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -z_\alpha$ **ならば，帰無仮説** $H_0 : \mu = \mu_0$ **が起こる確率は低いということになり，有意水準** α **で** H_0 **を棄却する (**H_1 **を採択する)。**

$\Longrightarrow$ **有意水準** α **で，母平均** μ **は** μ_0 **よりも小さいと判断する。**

「標準偏差は全国と東京都で差がなく 18 m^2 であることが分かっている」 $\Longrightarrow$ **分散は既知で** $\sigma^2 = 18^2$

有意水準 $\alpha = 0.05$ **のとき，** $z_\alpha = 1.645$ **となる。**

$n = 100$, $\mu_0 = 80.9$, $\overline{x} = 80.9$ **を代入する。**

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{62.5 - 80.9}{18/\sqrt{100}} = -10.22 < -z_\alpha = -1.645$$

有意水準 0.05 で，H_0 **を棄却する。東京都の住宅事情は全国平均より悪いといえる。**