8.5 t 検定 (正規母集団，母平均の検定，母分散未知, P.142)

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本平均 $\overline{X}$ の分布は，

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

となり，標準化によって，

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

となる。

さらに，分散 σ^2 を未知としたとき，σ^2 をその推定量 S^2 で置き換えて，

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

となる。(定理 6.5, P.97)

● ケース 1 (片側検定)

帰無仮説　$H_0 : \mu = \mu_0$

対立仮説　$H_1 : \mu < \mu_0$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

なので，

$$P(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)) = \alpha$$

となる。

このとき，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)$ ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ は μ_0 よりも小さいと判断する。

● ケース 2 (片側検定)

帰無仮説　$H_0 : \mu = \mu_0$

対立仮説　$H_1 : \mu > \mu_0$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

なので，

$$P(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)) = \alpha$$

となる。

このとき，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ を検定統計量と呼ぶ。

もし $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)$ ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ は μ_0 よりも大きいと判断する。

● ケース 3 (両側検定)

帰無仮説　$H_0 : \mu = \mu_0$

対立仮説　$H_1 : \mu \neq \mu_0$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

なので，

$$P(\left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2}(n-1)) = \alpha$$

となる。

このとき， $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ **を検定統計量と呼ぶ。**

もし

$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{\alpha/2}(n-1)$ **または** $\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2}(n-1)$

ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ と μ_0 は異なると判断する。

両側検定 $\Longrightarrow$ 区間推定に密接に関連している。

信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間は，

$$(\overline{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

として表される。

この区間に μ_0 が含まれなければ，帰無仮説 H_0 が棄却される。

例題 8.5 (P.144)：　ある年の労働者の週当たり平均労働時間は 41 時間だった。(1) 数年後に労働時間が短縮されているかどうか見るために 25 人の労働者を無作為に抽出して週当たり労働時間を調べたところ，平均 40.7 時間，標準偏差 0.9 時間であった。労働時間が短縮されたといえるかどうかを有意水準 0.01 で検定せよ。(2) 標本を増やして 144 人について調べたところ，平均 40.5 時間，標準偏差 0.8 時間であった。労働時間が短縮されたといえるかどうかを有意水準 0.01 で検定せよ。

解答：　n **人の労働時間** $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

σ^2 を S^2 に置き換えると，

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

となる。

帰無仮説　$H_0 : \mu = \mu_0$

対立仮説　$H_1 : \mu < \mu_0$

帰無仮説 H_0 が正しいもとで，

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

なので，

$$P(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)) = \alpha$$

となる。

ここでは $\mu_0 = 41$ となる。

もし $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)$ ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ は μ_0 よりも小さいと判断する。

(1) $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{40.7-41}{0.9/\sqrt{25}} = -1.667 > -t_{0.01}(24) = -2.49$

なので，H_0 を採択する。すなわち，労働時間が減少したとは言えない。

(2) $n = 144$ **なので，正規近似を行う。**

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

$$= \frac{40.5 - 41}{0.8/\sqrt{144}}$$

$$= -7.50 < -t_{0.01}(143) = -z_{0.01} = -2.326$$

なので，H_0 **を棄却する。すなわち，労働時間が減少したと言える。**

問題 8.3 (P.155)：　ある職業の平均年収が 740 万円，630 万円，690 万円という 3 つの推定結果が，3 つの異なった研究機関から発表された。16 人を無作為に抽出して調べたところ，その年収の平均は 655 万円，標準偏差は 60 万円であった。

(1) 5 % の有意水準で，3 つの研究機関が出した仮説をそれぞれ検定せよ。

(2) 年収の平均を μ として，μ の 95 % 信頼区間を作れ。次に，信頼区間に入るかどうかで 3 つの仮説を検定せよ。

解答： n **人の年収** $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

σ^2 **を** S^2 **に置き換えると，**

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n - 1)$$

となる。

帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$

対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$

帰無仮説 H_0 **が正しいもとで，**

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

なので，

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2}(n-1)\right) = \alpha$$

となる。

もし

$$\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{\alpha/2}(n-1) \text{ または } \frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2}(n-1)$$

ならば，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が起こる確率は低いということになり，有意水準 α で H_0 を棄却する (H_1 を採択する)。

$\Longrightarrow$ 有意水準 α で，母平均 μ と μ_0 は異なると判断する。

(1) 有意水準 $\alpha = 0.05$ なので，$t_{0.025}(15) = 2.131$ となる。

帰無仮説　$H_0 : \mu = 740$

対立仮説　$H_1 : \mu \neq 740$

$$\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{655-740}{60/\sqrt{16}} = -5.67 < -t_{0.025}(15) = -2.131$$

なので，H_0 を棄却する。

帰無仮説　$H_0 : \mu = 630$

対立仮説　$H_1 : \mu \neq 630$

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{655 - 630}{60/\sqrt{16}} = 1.67 < t_{0.025}(15) = 2.131$$

なので，H_0 を採択する。

帰無仮説　$H_0 : \mu = 690$

対立仮説　$H_1 : \mu \neq 690$

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{655 - 690}{60/\sqrt{16}} = -2.33 < -t_{0.025}(15) = -2.131$$

なので，H_0 を棄却する。

(2) 信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間を求める。

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

なので，

$$P(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)) = \alpha$$

となる。

$n = 16$ のとき，$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$

となるのは，$\alpha = 0.05$ で $t_{\alpha/2}(n-1) = 2.131$，である。

信頼係数 $1-\alpha$ **の** μ **の信頼区間は，**

$$(\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

となるので，

信頼係数 0.95 **の** μ **の信頼区間は** $(655-2.131\frac{60}{16}, 655+2.131\frac{60}{16})$

すなわち，(623, 687) を得る。

帰無仮説が信頼係数 0.95 の μ **の信頼区間 (623, 687) に入っていれば有意水準 0.05 で採択され，入っていなければ有意水準 0.05 で棄却される。すなわち，有意水準 0.05 で，**

帰無仮説 $H_0: \mu = 740$ **は棄却され，**

帰無仮説 $H_0: \mu = 630$ **は採択され，**

帰無仮説 $H_0 : \mu = 690$ は棄却される。

補足： 母平均の検定 (非正規母集団，大標本の場合)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で，$\mathbf{E}(X_i) = \mu$, $\mathbf{V}(X_i) = \sigma^2$ の分布に従う。

このとき，中心極限定理 (定理 6.1, P.90) から，

$$\frac{\overline{X} - \mathbf{E}(\overline{X})}{\sqrt{\mathbf{V}(\overline{X})}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1)$$

を得る。

さらに，σ^2 を S^2 で置き換えて，

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0,1)$$

を得る。

● **母分散 σ^2 は既知のとき：** 近似的に $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ が成り立つので，帰無仮説 $H_0：\mu=\mu_0$ が正しいもとで，$\boxed{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。

1. **対立仮説 $H_1：\mu<\mu_0$ (片側検定)**

$P\left(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha\right) \approx \alpha$ **なので，** $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ **のとき，有意水準** α **で帰無仮説** $H_0：\mu=\mu_0$ **を棄却する。**

2. 対立仮説 H_1：$\mu > \mu_0$ (片側検定)

$P\left(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\right) \approx \alpha$ **なので，** $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$ **のとき，有意水準** α **で帰無仮説** $H_0：\mu=\mu_0$ **を棄却する。**

3. 対立仮説 H_1：$\mu \neq \mu_0$ (両側検定)

$P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}\right) \approx \alpha$ **なので，** $\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}$ **のとき，有意水準** α **で帰無仮説** $H_0：\mu=\mu_0$ **を棄却する。**

● **母分散** σ^2 **は未知のとき：　近似的に，** $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ **が成り立つので，帰無仮説** H_0 : $\mu=\mu_0$ **が正しいもとで，** $\boxed{\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$ **となる (**μ **を** μ_0 **で置き換える)。このとき，検定統計量** $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$**。検定統計量の値** $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$**。**

1. **対立仮説** H_1 **：** $\mu < \mu_0$ **(片側検定)**

   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -z_\alpha\Big) \approx \alpha$ **なので，** $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < -z_\alpha$ **のとき，有意水準** α **で帰無仮説** H_0 : $\mu=\mu_0$ **を棄却する。**

2. **対立仮説** H_1 **：** $\mu > \mu_0$ **(片側検定)**

   $P\Big(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > z_\alpha\Big) \approx \alpha$ **なので，** $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > z_\alpha$ **のとき，有意水準** α **で帰無仮説** H_0 : $\mu=\mu_0$ **を棄却する。**

3. 対立仮説 H_1 ： $\mu \neq \mu_0$ (両側検定)

$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}\right) \approx \alpha$ なので，$\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0 ： $\mu = \mu_0$ を棄却する。

8.6　母平均の差の検定 (P.145)

8.6.1　母分散が既知の場合 (正規母集団)

2 つのグループ

・第 1 グループ：

大きさ n_1 の無作為標本

$X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $i = 1, 2, \cdots, n_1$

標本平均 $\overline{X}_1 = \dfrac{1}{n_1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}$

標本不偏分散 $S_1^2 = \dfrac{1}{n_1 - 1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \overline{X}_1)^2$

・第 2 グループ：

大きさ n_2 **の無作為標本**

$X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $i = 1, 2, \cdots, n_2$

標本平均 $\overline{X}_2 = \dfrac{1}{n_2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$

標本不偏分散 $S_2^2 = \dfrac{1}{n_2 - 1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \overline{X}_2)^2$

母平均の差を検定したいので，統計量 $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ **の分布を考える。**

定理 4.1 (P.54)，定理 4.5 (P.60) より，

$$\mathbf{E}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

定理 4.3 (P.55)，定理 4.8 (P.62) より，

$$\mathbf{V}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

したがって，

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\!\left(\mu_1 - \mu_2,\ \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

標準化によって，

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0, 1)$$

を得る。

● ケース 1 (片側検定)

帰無仮説　$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

対立仮説　$H_1 : \mu_1 < \mu_2$