

2021/11/12

2021/11/17 (訂正)

特別講義 (統計学入門II) 課題レポート

締め切り: 2021年11月30日, PM23:59:59

- 必ず, 氏名・学籍番号を解答用紙に書いてください。
- tanizaki@econ.osaka-u.ac.jp 宛に解答を, pdfファイルまたは画像ファイルで送ってください。
- Subject に「統計」としてください。でなければ, メールがごみ箱に行く可能性があります。
- ファイルサイズは, 読める範囲内で, 出来るだけ小さくして下さい (1MB以内を目指してください)。

IrfanView (<https://www.irfanview.com/>) というソフトでファイルサイズを小さくすることができます。

- 成績評価について, シラバスでは「定期試験 80%, 宿題 20%」としています。今回の課題レポートは 10%分とします。

1 X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする。 μ の推定量 (\tilde{X} とする) として, $\tilde{X} = \sum_{i=1}^n \omega_i X_i$ を考える。

- (1) \tilde{X} が μ の不偏推定量となるためには, ω_i にどのような条件が必要となるかを説明しなさい。
- (2) \tilde{X} は μ の不偏推定量であるとするとき, \tilde{X} の分散を σ^2 と ω_i で表しなさい。
- (3) ω_i にどのような条件があれば, \tilde{X} は μ の一致推定量となるかを説明しなさい。

- (4) 問 (1) で求めた条件の下で, 問 (2) で求めた \tilde{X} の分散が最小になるための ω_i を求めなさい。

ヒント: ラグランジェ未定乗数法で $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ を求める。

- (5) σ^2 の推定量として $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ を考える。このとき, S^2 は σ^2 の不偏推

定量かつ一致推定量であることを証明しなさい。ただし, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ とする。

ヒント: $U \sim \chi^2(k)$ とするとき, $E(U) = k$, $V(U) = 2k$ となる。

2 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から大きさ n の無作為標本を抽出した。

- (6) $n = 9$, $\sigma^2 = 3^2$ とする。得られたデータの平均は $\bar{x} = 5.4$ となった。このとき, 信頼係数 0.95 の μ の信頼区間を求めなさい。

さらに, $n = 16$ のときの μ の信頼区間と $n = 9$ のときとを比べなさい。

- (7) $n = 9$ とする。得られたデータの標本平均は $\bar{x} = 5.4$, 標本不偏分散は $s^2 = 3.0^2$ となった。このとき, 信頼係数 0.95 の μ の信頼区間を求めなさい。

さらに, $n = 9$ のとき, 問 (6) で得られた μ の信頼区間と比較しなさい。

- (8) 大きさ 4 の無作為標本 4, 6, 7, 9 が得られたとしよう。簡単化のために正規母集団を仮定する (実際は, 得られたデータが全部整数なのでこの仮定は無理がある)。この 4 つのデータから母集団の平均 (すなわち, 母平均) μ を信頼係数 0.90 で区間推定しなさい。