s^2 **の不偏性の証明：** まず，次のように書き直す。

$$u_i = Y_i - \alpha - \beta X_i = (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{u}_i) - \alpha - \beta X_i = (\hat{\alpha} - \alpha) + (\hat{\beta} - \beta) X_i + \hat{u}_i,$$

両辺を二乗する。

$$\begin{aligned} u_i^2 = (\hat{\alpha} - \alpha)^2 + (\hat{\beta} - \beta)^2 X_i^2 + \hat{u}_i^2 + 2(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta) X_i \\ +2(\hat{\alpha} - \alpha)\hat{u}_i + 2(\hat{\beta} - \beta) X_i \hat{u}_i \end{aligned}$$

総和をとる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i^2 &= n(\hat{\alpha} - \alpha)^2 + (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 + 2(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta) \sum_{i=1}^n X_i \\ &\quad +2(\hat{\alpha} - \alpha) \sum_{i=1}^n \hat{u}_i + 2(\hat{\beta} - \beta) \sum_{i=1}^n X_i \hat{u}_i \\ &= n(\hat{\alpha} - \alpha)^2 + (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 + 2n(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)\overline{X} \end{aligned}$$

期待値をとる。

$$\mathrm{E}(\sum_{i=1}^n u_i^2) = n\mathrm{E}(\hat{\alpha} - \alpha)^2 + \mathrm{E}(\hat{\beta} - \beta)^2 \sum_{i=1}^n X_i^2 + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2)$$

$$+2n\mathrm{E}((\hat{\alpha}-\alpha)(\hat{\beta}-\beta))\overline{X}$$

$$\begin{aligned} n\sigma^2 &= \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2} + \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2} + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2) - \frac{2n\sigma^2\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2} \\ &= 2\sigma^2\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}\right) + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2) = 2\sigma^2 + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2) \end{aligned}$$

途中の計算には以下が使われる。

$$\mathrm{E}(\sum_{i=1}^n u_i^2) = n\sigma^2, \qquad \mathrm{E}(\hat{\alpha}-\alpha)^2 = \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^n X_i^2}{n\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2},$$

$$\mathrm{E}(\hat{\beta}-\beta)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}, \qquad \mathrm{E}((\hat{\alpha}-\alpha)(\hat{\beta}-\beta)) = -\frac{\sigma^2\overline{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2},$$

よって,

$$\mathrm{E}(s^2) = \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{n-2}\right) = \sigma^2$$

を得る。すなわち，s^2 は σ^2 の不偏推定量である。

回帰分析に当てはめる。

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \alpha - \beta X_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n),$$

α, β を推定値に置き換えると,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

となる。さらに,

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2,$$

なので,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{\sigma^2} = \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

を得る。

s^2 の一致性の証明：　s^2 は

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2,$$

と定義される。

$\dfrac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$ なので (証明略),

$$\mathrm{E}\left(\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}\right) = n-2, \qquad \mathrm{V}\left(\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-2),$$

となる。さらに，書き直すと,

$$\frac{(n-2)^2}{\sigma^4}\mathrm{V}(s^2) = 2(n-2), \qquad \mathrm{V}(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n-2},$$

を得る。「$\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$ で，しかも，$n \longrightarrow \infty$ のとき $\mathrm{V}(s^2) \longrightarrow 0$」が言えるので，$s^2$ は σ^2 の一致推定量である。

標準誤差について：　標準誤差 = 不偏分散の平方根

誤差項 (または，攪乱項) の標準誤差 s

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{n-2}}$$

数値例：　$\hat{\alpha} = 0.5, \hat{\beta} = 0.7$ なので，$\hat{Y}_i = 0.5 + 0.7X_i, \hat{u}_i = Y_i - 0.5 - 0.7X_i$ により，$\hat{Y}_i, \hat{u}_i$ を計算する。

i	X_i	Y_i	X_i^2	X_iY_i	$\hat{Y}_i$	$\hat{u}_i$
1	5	4	25	20	4.0	0.0
2	1	1	1	1	1.2	−0.2
3	3	1	9	3	2.6	−1.6
4	2	3	4	6	1.9	1.1
5	4	4	16	16	3.3	0.7
合計	$\sum X_i$	$\sum Y_i$	$\sum X_i^2$	$\sum X_iY_i$	$\sum \hat{Y}_i$	$\sum \hat{u}_i$
	15	13	55	46	13	0.0
平均	$\overline{X}$	$\overline{Y}$				
	3	2.6				

誤差項 (または，攪乱項) の母分散 σ^2 の不偏推定量 s^2 は,

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 = \frac{1}{5-2}(0.0^2 + (-0.2)^2 + (-1.6)^2 + 1.1^2 + 0.7^2) = 1.43333$$

によって与えられる。

s は「回帰の標準誤差 (Standard Error of Regression)」と呼ばれ，この例では, $s = \sqrt{1.43333} = 1.197$ となる。

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分散の不偏推定量

$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の分散は,

$$\mathrm{V}(\hat{\alpha}) = \sigma_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}, \qquad \mathrm{V}(\hat{\beta}) = \sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

によって，与えられる。

σ^2 をその不偏分散 s^2 に置き換えることによって，$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ の分散の不偏推定量を次のように得ることができる。

$$s_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{s^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}, \qquad s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

さらに，平方根をとって，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の標準誤差はそれぞれ，

$$s_{\hat{\alpha}} = s\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}}, \qquad s_{\hat{\beta}} = \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}}$$

として与えられる。

数値例： $s^2 = 1.43333$ なので，

$$s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2} = 1.433333 \times 0.1 = 0.1433333$$

$$s_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{s^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{s^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2)} = 1.433333 \times 1.1 = 1.5766667$$

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の標準誤差はそれぞれ，平方根をとって，

$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.1433333} = 0.3786, \qquad s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{1.5766667} = 1.25565$$

となる。

6.3.5　$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分布

$\hat{\beta}$ について：

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})u_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i$$

$u_i \sim N(0, \sigma^2)$ で，かつ，それぞれ独立に分布する。また，$\hat{\beta}$ の平均，分散はそれぞれ，

$$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta, \qquad \mathrm{V}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2},$$

となるので，

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}),$$

を得る。変形すると,

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} \sim N(0,1),$$

となる。

さらに,

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

となり (証明略), $\hat{\beta}$ とは独立なので (証明略),

$$\frac{\dfrac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}}{\sqrt{\dfrac{(n-2)s^2}{\sigma^2}/(n-2)}} = \frac{\hat{\beta}-\beta}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} \sim t(n-2)$$

結果的には, σ を s で置き換えることによって,

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} \sim N(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\hat{\beta}-\beta}{s/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} \sim t(n-2)$$

が得られる。

$\hat{\alpha}$ について：

また，$\hat{\alpha}$ の平均，分散はそれぞれ，

$$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \alpha, \qquad \mathrm{V}(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2},$$

となるので，

$$\hat{\alpha} \sim N(\alpha, \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}),$$

を得る。変形すると，

$$\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sigma \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}}} \sim N(0, 1),$$

となる。

さらに,

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

となり (証明略), $\hat{\alpha}$ とは独立なので (証明略),

$$\frac{\dfrac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sigma\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-2)s^2}{\sigma^2}/(n-2)}} = \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{s\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}}} \sim t(n-2)$$

結果的に見ると, σ を s で置き換えると,

$$\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sigma\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}}} \sim N(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{s\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}}} \sim t(n-2)$$

となる。

まとめ：

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2), \qquad \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{s_{\hat{\alpha}}} \sim t(n-2)$$

ただし,

$$s_{\hat{\beta}} = \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}, \qquad s_{\hat{\alpha}} = s\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}}$$

とする。$s_{\hat{\beta}}$ は $\hat{\beta}$ の標準誤差，$s_{\hat{\alpha}}$ は $\hat{\alpha}$ の標準誤差とそれぞれ呼ばれる。

6.3.6　α，β の区間推定 (信頼区間)

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分布は，以下のように得られた。

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2), \qquad \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{s_{\hat{\alpha}}} \sim t(n-2),$$

$t_{\alpha/2}(n-2)$，$t_{1-\alpha/2}(n-2)$ をそれぞれ自由度 $n-2$ の t 分布の上側から $100\times\dfrac{\alpha}{2}\%$ 点，$100\times(1-\dfrac{\alpha}{2})\%$点の値とする。ただし，この α と切片の α は異なるものなので注意すること。このとき，

$$\mathrm{Prob}\Big(t_{1-\alpha/2}(n-2) < \frac{\hat{\beta}-\beta}{s_{\hat{\beta}}} < t_{\alpha/2}(n-2)\Big) = 1-\alpha,$$

すなわち，t 分布はゼロを中心として左右対称なので，$t_{1-\alpha/2}(n-2) = -t_{\alpha/2}(n-2)$ となり，

$$\mathrm{Prob}\Big(-t_{\alpha/2}(n-2) < \frac{\hat{\beta}-\beta}{s_{\hat{\beta}}} < t_{\alpha/2}(n-2)\Big) = 1-\alpha,$$

を得る。ただし，自由度と α が決まれば，$t_{\alpha/2}(n-2)$ は t 分布表から得られる。

書き直して，

$$\mathrm{Prob}\Big(\hat{\beta} - t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\beta}} < \beta < \hat{\beta} + t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\beta}}\Big) = 1-\alpha,$$

と表される。

したがって，$\hat{\beta}$，$s_{\hat{\beta}}$ を推定値で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の β の信頼区間は，

$$\left(\hat{\beta} - t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\beta}},\ \hat{\beta} + t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\beta}}\right)$$

となる。

同様に，信頼係数 $1-\alpha$ (この α は確率) の α (この α は切片) の信頼区間は，

$$\left(\hat{\alpha} - t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\alpha}},\ \hat{\alpha} + t_{\alpha/2}(n-2)s_{\hat{\alpha}}\right)$$

となる。

数値例：　今までと同様に，以下の数値例をとりあげる。

i	X_i	Y_i
1	5	4
2	1	1
3	3	1
4	2	3
5	4	4

回帰モデル $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ を推定した結果，以下の推定値を得た。

$$\hat{\beta} = 0.7, \qquad \hat{\alpha} = 0.5$$
$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.1433333} = 0.3786, \qquad s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{1.5766667} = 1.25565$$

$t_{0.025}(3) = 3.1824$ なので，信頼係数 0.95 の傾き β の信頼区間は,

$$(0.7 - 3.1824 \times 0.3786,\ 0.7 + 3.1824 \times 0.3786) = (-0.505,\ 1.905)$$

となり，信頼係数 0.95 の切片 α の信頼区間は,

$$(0.5 - 3.1824 \times 1.25565,\ 0.5 + 3.1824 \times 1.25565,) = (-3.496,\ 4.496)$$

となる。

同様にして，$t_{0.05}(3) = 2.3534$ なので，信頼係数 0.90 の傾き β の信頼区間は,

$$(0.7 - 2.3534 \times 0.3786,\ 0.7 + 2.3534 \times 0.3786) = (-0.191,\ 1.591)$$

となり，信頼係数 0.90 の切片 α の信頼区間は,

$$(0.5 - 2.3534 \times 1.25565,\ 0.5 + 2.3534 \times 1.25565) = (-2.455,\ 3.455)$$

となる。

6.3.7　α，β の仮説検定

「帰無仮説 $H_0 : \beta = \beta_0$，対立仮説 $H_1 : \beta \neq \beta_0$」の検定を行う。帰無仮説：$H_0 : \beta = \beta_0$ が正しいとき，

$$\frac{\hat{\beta} - \beta_0}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2),$$

となる。

よって，検定の手順は，

1. 検定統計値 $\dfrac{\hat{\beta} - \beta_0}{s_{\hat{\beta}}}$ を計算する。ただし，

$$s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}, \qquad s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^n \hat{u}_t^2, \qquad \hat{u}_t = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i,$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}, \qquad \hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X},$$

である。

2. 有意水準 α を決めて (この α は，回帰式の定数項の α とは異なることに注意)，自由度 $n-2$ の t 分布表から $100\times\alpha$ % 点の値を求める。通常，$\alpha = 0.01$, 0.05 とす場合が多い。

3. 自由度 $n-2$ の t 分布表から得られた $100\times\alpha$ % 点の値と検定統計値の大小を比較する。すなわち，

$$\left|\frac{\hat{\beta}-\beta_0}{s_{\hat{\beta}}}\right| > t_{\alpha/2}(n-2),$$

   ならば，有意水準 α で帰無仮説 H_0 : $\beta = \beta_0$ を棄却する。帰無仮説 $H_0 : \beta = \beta_0$ を中心とした分布を考えるとき，データから得られた検定統計量は，分布の端にあり，確率的に起こりにくいと考える。

となる。

定数項の推定量 $\hat{\alpha}$ についても同様。

t 値について

特に,「帰無仮説： $H_0 : \beta = 0$，対立仮説： $H_1 : \beta \neq 0$」の検定は特別の意味を持つ。

帰無仮説のもとでは（「帰無仮説が正しいとき」と同じ意味）,

$$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2)$$

の分布に従う。

このときの t 統計量の値 (すなわち，$\dfrac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}$) を t 値と呼ぶ。

$H_0 : \beta = 0$ という帰無仮説は，回帰式

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

において,「X_i が Y_i に何の影響も与えない」という仮説であることを意味する。

有意水準 α のもとで (この α は，回帰式の定数項の α とは異なることに注意),

$$\left|\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}\right| > t_{\alpha/2}(n-2)$$

ならば，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\beta = 0$ を棄却する。

1. 回帰モデル

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

において，経済理論から $\beta > 0$ という符号条件が想定されたとする。

2. 有意水準 α を決める。(例えば，$\alpha = 0.05$, 0.01)

3. 実際のデータから，$\hat{\beta} > 0$ が得られた場合

   (a) t 値が,

   $$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} > t_{\alpha/2}(n-2)$$

   となった場合，帰無仮説 H_0 : $\beta = 0$ が棄却され，$\beta > 0$ が統計的にも証明され，経済理論は現実経済をサポートする結果。

   (b) t 値が,

   $$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} < t_{\alpha/2}(n-2)$$

となった場合，帰無仮説 H_0：$\beta = 0$ を棄却できず，$\hat{\beta} > 0$ にもかかわらず，$\beta < 0$ の可能性もあるため，経済理論が現実経済を積極的には支持しない。

4. 実際のデータから，$\hat{\beta} < 0$ が得られた場合

   (a) t 値が，

$$-t_{\alpha/2}(n-2) < \frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}$$

   となった場合，帰無仮説 H_0：$\beta = 0$ を棄却できず，$\hat{\beta} < 0$ にもかかわらず，$\beta > 0$ の可能性もあるため，得られた推定結果と経済理論は完全に矛盾しているとは言えない。

   (b) t 値が，

$$-t_{\alpha/2}(n-2) > \frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}$$

   となった場合，帰無仮説 H_0：$\beta = 0$ は棄却され，統計的には $\beta < 0$ となり，得られた推定結果と経済理論は完全に矛盾している。すな

わち，この場合，経済理論の立て直しが必要。

数値例： 今までと同様に，以下の数値例をとりあげる。

i	X_i	Y_i
1	5	4
2	1	1
3	3	1
4	2	3
5	4	4

回帰モデル $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ を推定した結果，以下の推定値を得た。

$$\hat{\beta} = 0.7, \qquad s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.1433333} = 0.3786,$$

帰無仮説 H_0： $\beta = 0$，対立仮説 H_0： $\beta \neq 0$ の検定を行う。t 値は $0.7/0.3786 = 1.849$，有意水準 5 % の $t_{\alpha/2}(n-2)$ の値は 3.1824 となり ($\alpha = 0.05, n = 5$),

$$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = \frac{0.7}{\sqrt{0.1433333}} = 1.849 < t_{\alpha/2}(n-2) = 3.1824$$

を得る。このように，有意水準 5 % で帰無仮説 H_0： $\beta = 0$ は棄却されない。よって，β の符号は統計学的に確定できない。

また，α についても同様に，t 値を計算できる。

$$\hat{\alpha} = 0.5, \qquad s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{1.5766667} = 1.25565,$$

なので，t 値は，

$$\frac{\hat{\alpha}}{s_{\hat{\alpha}}} = \frac{0.5}{\sqrt{1.5766667}} = 0.398 < t_{\alpha/2}(n-2) = 3.1824,$$

となり，有意水準 5 % で H_0： $\alpha = 0$ を棄却できない。

しかし，定数項については，経済学的意味が無い場合が多い。

推定結果の表記方法：　回帰モデル：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

の推定の結果，$\hat{\alpha} = 0.5, \hat{\beta} = 0.7$, $s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{1.5766667} = 1.25565$, $s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.1433333} = 0.3786$, $\dfrac{\hat{\alpha}}{s_{\hat{\alpha}}} = 0.398$, $\dfrac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = 1.849$, $s^2 = 1.433333$ (すなわち，$s = 1.197$), $R^2 =$

0.5326, $\overline{R}^2 = 0.3768$, を得た。これらをまとめて,

$$Y_i = \underset{(0.398)}{0.5} + \underset{(1.849)}{0.7} X_i,$$

$$R^2 = 0.5326, \quad \overline{R}^2 = 0.3768, \quad s = 1.197,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。

または,

$$Y_i = \underset{(1.25565)}{0.5} + \underset{(0.3786)}{0.7} X_i,$$

$$R^2 = 0.5326, \quad \overline{R}^2 = 0.3768, \quad s = 1.197,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は標準誤差を表すものとする。

のように書く。

6.4　確率的モデル：重回帰モデル

n 組のデータ $(Y_i, X_{1i}, X_{2i}, \cdots, X_{ki})$, $i = 1, 2, \cdots, n$ を用いて，k 変数の多重回帰モデルを考える。

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

ただし，X_{ji} は j 番目の説明変数の第 i 番目の観測値を表す。u_i は誤差項 (または，攪乱項) で，同じ仮定を用いる (すなわち，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は互いに独立に，平均ゼロ，分散 σ^2 の正規分布に従う)。$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ は推定されるべきパラメータである。すべての i について，$X_{1i} = 1$ とすれば，β_1 は定数項として表される。

6.4.1　推定量の性質

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ の最小二乗推定量は $\hat\beta_1, \hat\beta_2, \cdots, \hat\beta_k$ とする。

誤差項 (または，攪乱項) u_i の分散 σ^2 の推定量 s^2 は，

$$s^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}\hat u_i^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat\beta_1 X_{1i} - \hat\beta_2 X_{2i} - \cdots - \hat\beta_k X_{ki})^2$$

として表される。

　このとき,

$$\mathrm{E}(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \qquad \operatorname{plim} \hat{\beta}_j = \beta_j, \qquad \mathrm{E}(s^2) = \sigma^2, \qquad \operatorname{plim} s^2 = \sigma^2,$$

を証明することが出来る。(証明略)

分布について：　$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k$ の分散は以下のように表される。

$$\mathrm{V}\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}(\hat{\beta}_1) & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & \mathrm{V}(\hat{\beta}_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \cdots & \mathrm{V}(\hat{\beta}_k) \end{pmatrix}$$

$$= \sigma^2 \begin{pmatrix} \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum X_{1i}X_{ki} \\ \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \cdots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{1i}X_{ki} & \sum X_{2i}X_{ki} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

最後の等号の右辺の逆行列の i 行 j 列目の要素を a_{ij} としたとき, $\hat{\beta}_j$ の分散は,

$$\mathrm{V}(\hat{\beta}_j) = \sigma^2 a_{jj}$$

となる（証明略）。このとき，

$$\hat{\beta}_j \sim N(\beta_j, \sigma^2 a_{jj}),$$

となり，標準化すると，

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma\sqrt{a_{jj}}} \sim N(0, 1),$$

が得られる。さらに，

$$\frac{(n-k)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k),$$

となり (証明略)，しかも，$\hat{\beta}_j$ と s^2 の独立性から (証明略)，

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s\sqrt{a_{jj}}} \sim t(n-k)$$

となる。このように，通常の区間推定や仮説検定を行うことが出来る。

(注)　$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は互いに独立で，$u_i \sim N(0, \sigma^2)$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{u_i}{\sigma}\Big)^2 \sim \chi^2(n)$$

となる。u_i をその推定値 $\hat{u}_i$ で置き換えると，

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\hat{u}_i}{\sigma}\Big)^2 = \frac{(n-k)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k),$$

ただし，s^2 は σ^2 の推定量で，$s^2 = \dfrac{1}{n-k}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$ である。$\hat{u}_i$ を得るためには，$\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k$（$k$ 個のパラメータ推定値）を求めなければならない。$n-k$（= データ数 – パラメータ数）を自由度と呼ばれる。