$$= \frac{2\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 - (\hat{u}_1^2 + \hat{u}_n^2)}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2} - 2\frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_i\hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2} \approx 2(1-\hat{\rho}),$$

以下の 2 つの近似が用いられる。

$$\frac{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_n^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2} \approx 0, \qquad \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_i\hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2} = \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_i\hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{i-1}^2 + \hat{u}_n^2} \approx \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_i\hat{u}_{i-1}}{\sum_{i=2}^{n}\hat{u}_{i-1}^2} = \hat{\rho}$$

すなわち，$\hat{\rho}$ は $\hat{u}_i$ と $\hat{u}_{i-1}$ の回帰係数である。$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i$ において，u_i, u_{i-1} の代わりに $\hat{u}_i, \hat{u}_{i-1}$ に置き換えて，ρ の推定値 $\hat{\rho}$ を求める。

1. DW の値が 2 前後のとき，系列相関なし ($\hat{\rho} = 0$ のとき，$DW \approx 2$)。

2. DW が 2 より十分に小さいとき，正の系列相関と判定される。

3. DW が 2 より十分に大きいとき，負の系列相関と判定される。

正確な判定には，データ数 n とパラメータ数 k に依存する。

数値例：　今までと同じ数値例で，DW を計算する。

i	Y_i	X_i	X_iY_i	X_i^2	$\hat{Y}_i$	$\hat{u}_i$
1	6	10	60	100	6.8	−0.8
2	9	12	108	144	8.1	0.9
3	10	14	140	196	9.4	0.6
4	10	16	160	256	10.7	−0.7
合計	$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum X_iY_i$	$\sum X_i^2$	$\sum \hat{Y}_i$	$\sum \hat{u}_i$
	35	52	468	696	35	0
平均	$\overline{Y}$	$\overline{X}$				
	8.75	13				

$$
\begin{aligned}
DW &= \frac{\sum_{i=2}^{n}(\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2} \\
&= \frac{(-0.8-0.9)^2 + (0.9-0.6)^2 + (0.6-(-0.7))^2}{(-0.8)^2 + 0.9^2 + 0.6^2 + (-0.7)^2} = \frac{4.67}{2.30} = 2.03
\end{aligned}
$$

推定結果の表記方法：　回帰モデル：

$$
Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,
$$

の推定の結果，$\hat{\alpha} = 0.3$, $\hat{\beta} = 0.65$, $s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{10.0005} = 3.163$, $s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.0575} = 0.240$, $\dfrac{\hat{\alpha}}{s_{\hat{\alpha}}} = 0.095$, $\dfrac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = 2.708$, $s^2 = 1.15$ (すなわち，$s = 1.07$), $R^2 = 0.786$, $\overline{R}^2 = 0.679$, $DW = 2.03$ を得た。これらをまとめて,

$$Y_i = \underset{(0.095)}{0.3} + \underset{(2.708)}{0.65} X_i,$$

$$R^2 = 0.786, \quad \overline{R}^2 = 0.679, \quad s = 1.07, \quad DW = 2.03,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。

または,

$$Y_i = \underset{(3.163)}{0.3} + \underset{(0.240)}{0.65} X_i,$$

$$R^2 = 0.786, \quad \overline{R}^2 = 0.679, \quad s = 1.07, \quad DW = 2.03,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は標準誤差を表すものとする。

のように書く。$s = \sqrt{1.15} = 1.07$ に注意。

図 4： 正の系列相関

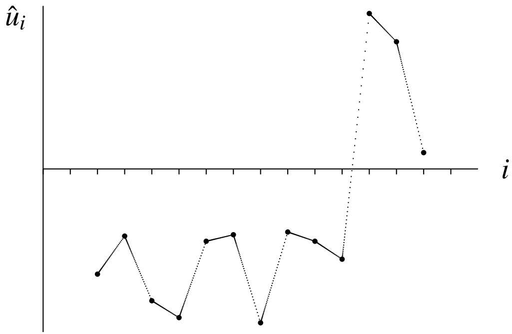
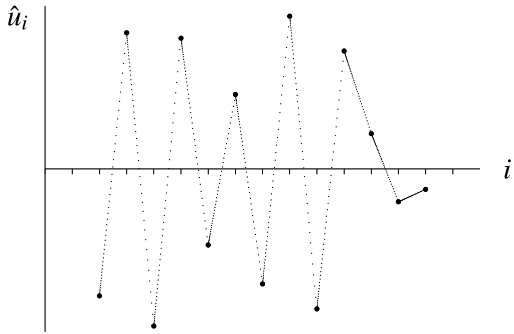


図 5： 負の系列相関



ダービン・ワトソン統計量の 5 % 点の上限と下限

(1) $k' = 1$

n	A		B		C		D		E	
	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	0	1.08	1.08	1.36	1.36	2.64	2.64	2.92	2.92	4
20	0	1.20	1.20	1.41	1.41	2.59	2.59	2.80	2.80	4
25	0	1.29	1.29	1.45	1.45	2.55	2.55	2.71	2.71	4
30	0	1.35	1.35	1.49	1.49	2.51	2.51	2.65	2.65	4

(2) $k' = 2$

n	A		B		C		D		E	
	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限	下限	上限
	0	dl	dl	du	du	$4-du$	$4-du$	$4-dl$	$4-dl$	4
15	0	0.95	0.95	1.54	1.54	2.46	2.46	3.05	3.05	4
20	0	1.10	1.10	1.54	1.54	2.46	2.46	2.90	2.90	4
25	0	1.21	1.21	1.55	1.55	2.45	2.45	2.79	2.79	4
30	0	1.28	1.28	1.57	1.57	2.43	2.43	2.72	2.72	4

k' は定数項を除くパラメータ数を表すものとする。

(3) $k' = 3$

n	A 下限 0	A 上限 dl	B 下限 dl	B 上限 du	C 下限 du	C 上限 $4-du$	D 下限 $4-du$	D 上限 $4-dl$	E 下限 $4-dl$	E 上限 4
15	0	0.82	0.82	1.75	1.75	2.25	2.25	2.25	3.18	4
20	0	1.00	1.00	1.68	1.68	2.32	2.32	2.32	3.00	4
25	0	1.12	1.12	1.66	1.66	2.34	2.34	2.34	2.88	4
30	0	1.21	1.21	1.65	1.65	2.35	2.35	2.35	2.79	4

(4) $k' = 4$

n	A 下限 0	A 上限 dl	B 下限 dl	B 上限 du	C 下限 du	C 上限 $4-du$	D 下限 $4-du$	D 上限 $4-dl$	E 下限 $4-dl$	E 上限 4
15	0	0.69	0.69	1.97	1.97	2.03	2.03	3.31	3.31	4
20	0	0.90	0.90	1.83	1.83	2.17	2.17	3.10	3.10	4
25	0	1.04	1.04	1.77	1.77	2.23	2.23	2.96	2.96	4
30	0	1.14	1.14	1.74	1.74	2.26	2.26	2.86	2.86	4

k' は定数項を除くパラメータ数を表すものとする。

(5) $k' = 5$

n	A 下限 0	A 上限 dl	B 下限 dl	B 上限 du	C 下限 du	C 上限 $4-du$	D 下限 $4-du$	D 上限 $4-dl$	E 下限 $4-dl$	E 上限 4
15	0	0.56	0.56	2.21	—	—	2.21	3.44	3.44	4
20	0	0.79	0.79	1.99	1.99	2.01	2.01	3.21	3.21	4
25	0	0.95	0.95	1.89	1.89	2.11	2.11	3.05	3.05	4
30	0	1.07	1.07	1.83	1.83	2.17	2.17	2.93	2.93	4

k' は定数項を除くパラメータ数を表すものとする。

A: 正の系列相関あり
B: 系列相関の有無を判定不能
C: 系列相関なし
D: 系列相関の有無を判定不能
E: 負の系列相関あり

ダービン・ワトソン統計量の 5 % 点の上限と下限

	$k'=1$		$k'=2$		$k'=3$		$k'=4$		$k'=5$		$k'=6$		$k'=7$	
n	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du
6	0.610	1.400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0.700	1.356	0.467	1.896	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.367	2.287	—	—	—	—	—	—	—	—
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588	—	—	—	—	—	—
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822	—	—	—	—
11	0.927	1.324	0.758	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.315	2.645	0.203	3.004	—	—
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.380	2.506	0.268	2.832	0.171	3.149
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.444	2.390	0.328	2.692	0.230	2.985
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296	0.389	2.572	0.286	2.848
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220	0.447	2.471	0.343	2.727
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157	0.502	2.388	0.398	2.624
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104	0.554	2.318	0.451	2.537
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060	0.603	2.257	0.502	2.461
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023	0.649	2.206	0.549	2.396
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991	0.691	2.162	0.595	2.339
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964	0.731	2.124	0.637	2.290
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940	0.769	2.090	0.677	2.246
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920	0.804	2.061	0.715	2.208
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902	0.837	2.035	0.750	2.174
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886	0.868	2.013	0.784	2.144
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873	0.897	1.992	0.816	2.117
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861	0.925	1.974	0.845	2.093
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850	0.951	1.959	0.874	2.071
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841	0.975	1.944	0.900	2.052
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833	0.998	1.931	0.926	2.034
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825	1.020	1.920	0.950	2.018
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819	1.041	1.909	0.972	2.004
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813	1.061	1.900	0.994	1.991
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808	1.079	1.891	1.015	1.978
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803	1.097	1.884	1.034	1.967
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799	1.114	1.876	1.053	1.957
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795	1.131	1.870	1.071	1.948
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792	1.146	1.864	1.088	1.939
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789	1.161	1.859	1.104	1.932
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786	1.175	1.854	1.120	1.924
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776	1.238	1.835	1.189	1.895
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771	1.291	1.822	1.246	1.875
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768	1.334	1.814	1.294	1.861
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767	1.372	1.808	1.335	1.850
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767	1.404	1.805	1.370	1.843
70	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768	1.433	1.802	1.401	1.838
75	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770	1.458	1.801	1.428	1.834
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772	1.480	1.801	1.453	1.831
85	1.623	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774	1.500	1.801	1.474	1.829
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776	1.518	1.801	1.494	1.827
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778	1.535	1.802	1.512	1.827
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780	1.550	1.803	1.528	1.826
150	1.720	1.747	1.706	1.760	1.693	1.774	1.679	1.788	1.665	1.802	1.651	1.817	1.637	1.832
200	1.758	1.779	1.748	1.789	1.738	1.799	1.728	1.809	1.718	1.820	1.707	1.831	1.697	1.841

	$k'=8$		$k'=9$		$k'=10$		$k'=11$		$k'=12$		$k'=13$	
n	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	0.147	3.266	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14	0.200	3.111	0.127	3.360	—	—	—	—	—	—	—	—
15	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438	—	—	—	—	—	—
16	0.304	2.860	0.222	3.090	0.155	3.304	0.098	3.503	—	—	—	—
17	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184	0.138	3.378	0.087	3.557	—	—
18	0.407	2.668	0.321	2.873	0.244	3.073	0.177	3.265	0.123	3.441	0.078	3.603
19	0.456	2.589	0.369	2.783	0.290	2.974	0.220	3.159	0.160	3.335	0.111	3.496
20	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885	0.263	3.063	0.200	3.234	0.145	3.395
21	0.546	2.461	0.461	2.633	0.380	2.806	0.307	2.976	0.240	3.141	0.182	3.300
22	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.735	0.349	2.897	0.281	3.057	0.220	3.211
23	0.628	2.360	0.545	2.514	0.465	2.670	0.391	2.826	0.322	2.979	0.259	3.129
24	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613	0.431	2.761	0.362	2.908	0.297	3.053
25	0.702	2.280	0.621	2.419	0.544	2.560	0.470	2.702	0.400	2.844	0.335	2.983
26	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513	0.508	2.649	0.438	2.784	0.373	2.919
27	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.470	0.544	2.600	0.475	2.730	0.409	2.860
28	0.798	2.188	0.723	2.309	0.649	2.431	0.578	2.555	0.510	2.680	0.445	2.805
29	0.826	2.164	0.753	2.278	0.681	2.396	0.612	2.515	0.544	2.634	0.479	2.754
30	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363	0.643	2.477	0.577	2.592	0.513	2.708
31	0.879	2.120	0.810	2.226	0.741	2.333	0.674	2.443	0.608	2.553	0.545	2.665
32	0.904	2.102	0.836	2.203	0.769	2.306	0.703	2.411	0.638	2.518	0.576	2.625
33	0.927	2.085	0.861	2.181	0.796	2.281	0.731	2.382	0.667	2.484	0.606	2.588
34	0.950	2.069	0.885	2.162	0.821	2.257	0.758	2.355	0.695	2.454	0.634	2.553
35	0.971	2.054	0.908	2.144	0.845	2.236	0.783	2.330	0.722	2.425	0.662	2.521
36	0.991	2.041	0.930	2.127	0.868	2.216	0.808	2.306	0.748	2.398	0.689	2.492
37	1.011	2.029	0.951	2.112	0.891	2.197	0.831	2.285	0.772	2.374	0.714	2.464
38	1.029	2.017	0.970	2.098	0.912	2.180	0.854	2.265	0.796	2.351	0.739	2.438
39	1.047	2.007	0.990	2.085	0.932	2.164	0.875	2.246	0.819	2.329	0.763	2.413
40	1.064	1.997	1.008	2.072	0.952	2.150	0.896	2.228	0.840	2.309	0.785	2.391
45	1.139	1.958	1.089	2.022	1.038	2.088	0.988	2.156	0.938	2.225	0.887	2.296
50	1.201	1.930	1.156	1.986	1.110	2.044	1.064	2.103	1.019	2.163	0.973	2.225
55	1.253	1.909	1.212	1.959	1.170	2.010	1.129	2.062	1.087	2.116	1.045	2.170
60	1.298	1.894	1.260	1.939	1.222	1.984	1.184	2.031	1.145	2.079	1.106	2.127
65	1.336	1.882	1.301	1.923	1.266	1.964	1.231	2.006	1.195	2.049	1.160	2.093
70	1.369	1.874	1.337	1.910	1.305	1.948	1.272	1.987	1.239	2.026	1.206	2.066
75	1.399	1.867	1.369	1.901	1.339	1.935	1.308	1.970	1.277	2.006	1.247	2.043
80	1.425	1.861	1.397	1.893	1.369	1.925	1.340	1.957	1.312	1.990	1.283	2.024
85	1.448	1.857	1.422	1.886	1.396	1.916	1.369	1.946	1.342	1.977	1.315	2.008
90	1.469	1.854	1.445	1.881	1.420	1.909	1.395	1.937	1.369	1.966	1.344	1.995
95	1.489	1.852	1.465	1.877	1.442	1.903	1.418	1.930	1.394	1.956	1.370	1.984
100	1.506	1.850	1.484	1.874	1.462	1.898	1.439	1.923	1.416	1.948	1.393	1.974
150	1.622	1.846	1.608	1.862	1.593	1.877	1.579	1.892	1.564	1.908	1.549	1.924
200	1.686	1.852	1.675	1.863	1.665	1.874	1.654	1.885	1.643	1.897	1.632	1.908

n は標本数，k' は定数項を除く説明変数の数とする。

（出所）`http://www.stanford.edu/~clint/bench/dwcrit.htm`

9.1.2　最小二乗推定量の分散について

単回帰

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i, \qquad n = 1, 2, \cdots, n$$

仮定：$\mathrm{E}(u_i) = 0$

$\mathrm{V}(u_i) = \mathrm{E}(u_i^2) = \sigma^2$

$i \neq j$ について，$\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = \mathrm{E}(u_i u_j) = \sigma_{ij} \longleftarrow$ この仮定追加

系列相関を無視して，通常の最小二乗推定量は,

$$\hat{\beta} = \sum_i \omega_i Y_i = \beta + \sum_i \omega_i u_i$$

である。ただし，$\omega_i = \dfrac{X_i - \overline{X}}{\sum_j (X_j - \overline{X})^2}$

$\mathrm{E}(\hat{\beta})$ について,

$$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \mathrm{E}(\beta + \sum_i \omega_i u_i) = \beta + \sum_i \omega_i \mathrm{E}(u_i) = \beta$$

$u_1, u_2, \cdots, u_n$ に系列相関があっても，$\hat{\beta}$ は不偏推定量となる。

　$\mathrm{V}(\hat{\beta})$ について,

$$\mathrm{V}(\hat{\beta}) = \mathrm{V}(\beta + \sum_i \omega_i u_i) = \mathrm{V}(\sum_i \omega_i u_i) = \mathrm{E}((\sum_i \omega_i u_i)^2) \quad \longleftarrow \text{分散の定義}$$

$$= \mathrm{E}((\sum_i \omega_i u_i)(\sum_j \omega_j u_j)) \quad \longleftarrow \text{添字一つ変更}$$

$$= \mathrm{E}(\sum_i \sum_j \omega_i \omega_j u_i u_j) = \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \mathrm{E}(u_i u_j) = \sum_i \omega_i^2 \mathrm{E}(u_i^2) + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \omega_i \omega_j \mathrm{E}(u_i u_j)$$

$$= \sigma^2 \sum_i \omega_i^2 + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \sigma_{ij} \omega_i \omega_j \neq \sigma^2 \sum_i \omega_i^2$$

　したがって，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ に系列相関があるとき，通常の最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ の分散の推定量は，$s^2 \sum_i \omega_i^2 + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} s_{ij} \omega_i \omega_j$ とならなければならない。s^2, s_{ij} は σ^2, σ_{ij} の推定量とする。しかし，計量ソフトは $s^2 \sum_i \omega_i^2$ と計算する。

9.1.3　系列相関のもとで回帰式の推定

回帰式が

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i,$$

のときの推定を考える。ただし，$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。

u_i を消去すると，

$$(Y_i - \alpha - \beta X_i) = \rho(Y_{i-1} - \alpha - \beta X_{i-1}) + \epsilon_i,$$

また，少し整理すると，

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = \alpha(1-\rho) + \beta(X_i - \rho X_{i-1}) + \epsilon_i,$$

となる。

$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とするので，最小二乗法を適用が可能となる。しかし，通常の最小二乗法と同様に，残差平方和を最小にするような推定量 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{\rho}$ を求めたいが，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{\rho}$ の解を (X_i, Y_i) の陽関数の形で書き表すことは不可能である。したがって，少し工夫が必要となる。

残差 $\hat{\epsilon}_i$ を次のように二通りの表し方をする。

- $\hat{\epsilon}_i = \hat{u}_i - \hat{\rho}\hat{u}_{i-1}$，ただし，$\hat{u}_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i$

- $\hat{\epsilon}_i = Y_i^* - \hat{\alpha}' - \hat{\beta}X_i^*$，ただし，$Y_i^* = Y_i - \hat{\rho}Y_{i-1}$，$X_i^* = X_i - \hat{\rho}X_{i-1}$，$\hat{\alpha}' = \hat{\alpha}(1-\hat{\rho})$

残差平方和 $\sum_{i=2}^{n} \hat{\epsilon}_i$ を $S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$ とおく。$S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$ を最小にするような $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{\rho}$ を求める。すなわち，次の最小化問題を解く。

$$\min_{\hat{\alpha},\, \hat{\beta},\, \hat{\rho}} S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$$

$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{\rho}$ について $S(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho})$ を微分してゼロとおいて，

$$\frac{\partial S(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\rho})}{\partial \hat{\alpha}} = \frac{\partial S(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\rho})}{\partial \hat{\alpha}'}\frac{\partial \hat{\alpha}'}{\partial \hat{\alpha}} = -2(1-\hat{\rho})\sum_{i=2}^{n}(Y_i^* - \hat{\alpha}' - \hat{\beta}X_i^*) = 0$$

$$\frac{\partial S(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\rho})}{\partial \hat{\beta}} = -2\sum_{i=2}^{n} X_i^*(Y_i^* - \hat{\alpha}' - \hat{\beta}X_i^*) = 0$$

$$\frac{\partial S(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\rho})}{\partial \hat{\rho}} = -2\sum_{i=2}^{n} \hat{u}_{i-1}(\hat{u}_i - \hat{\rho}\hat{u}_{i-1}) = 0$$

の 3 つの連立方程式を解く。すなわち，

$$\hat\beta = \frac{\sum_{i=2}^{n}(X_i^* - \overline{X}_i^*)(Y_i^* - \overline{Y}_i^*)}{\sum_{i=2}^{n}(X_i^* - \overline{X}_i^*)^2}$$

$$\hat\alpha' = \hat\alpha(1-\hat\rho) = \overline{Y}_i^* - \hat\beta\overline{X}_i^*$$

$$\hat\rho = \frac{\sum_{i=2}^{n} \hat u_{i-1}\hat u_i}{\sum_{i=2}^{n} \hat u_{i-1}^2}$$

を解くことになる。ただし，$\overline{X}_i^* = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} X_i^*$，$\overline{Y}_i^* = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} Y_i^*$ とする（$n-1$ 個のデータの平均）。

計算の手順として，

(i) $\hat\rho$ に与えたもとで（最初は $\hat\rho = 0$），上記最初の 2 つの式を用いて，$(\hat\alpha, \hat\beta)$ を求める。

(ii) $(\hat\alpha, \hat\beta)$ を与えたもとで，上記 3 つ目の式を用いて，$\hat\rho$ を求める。

(iii) 上記手順 (i) と (ii) を交互に，$(\hat\alpha, \hat\beta, \hat\rho)$ が収束するまで繰り返す。

とする。この計算手順はコクラン＝オーカット法 (Cochrane-Orcutt estimation) と呼ばれる。

簡便法：ρ の求め方：　より簡単なもう一つの方法として，DW は近似的に $DW \approx 2(1-\widehat{\rho})$ と表されるので，DW から $\widehat{\rho}$ を逆算して求める。そして，$Y_i^* = Y_i - \widehat{\rho} Y_{i-1}$，$X_i^* = X_i - \widehat{\rho} X_{i-1}$) を新たな変数として，

$$Y_i^* = \alpha' + \beta X_i^* + \epsilon_i,$$

に最小二乗法を適用する。ただし，$\alpha' = \alpha(1-\hat{\rho})$ とする。

より一般的に，回帰式が

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$
$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i,$$

の重回帰ときの推定を考える。ただし，$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。

u_i を消去すると，

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = \beta_1(X_{1i} - \rho X_{1,i-1}) + \beta_2(X_{2i} - \rho X_{2,i-1}) + \cdots + \beta_k(X_{ki} - \rho X_{k,i-1}) + \epsilon_i,$$

となる。残差平方和 $S(\hat\beta_1,\ \hat\beta_2,\ \cdots,\ \hat\beta_k,\ \hat\rho)=\sum_{i=2}^n \hat\epsilon_i^2$ を最小にする $\hat\beta_1,\ \hat\beta_2,\ \cdots,\ \hat\beta_k,\ \hat\rho$ を求める。ただし，$\hat\epsilon_i = Y_i^* - \hat\beta_1 X_{1i}^* - \hat\beta_2 X_{2i}^* - \cdots - \hat\beta_k X_{ki}^*$，または，$\hat\epsilon_i = \hat u_i - \hat\rho\hat u_{i-1}$ のどちらかで残差が表される。また，式中の記号は，$Y_i^* = Y_i - \hat\rho Y_{i-1}$，$X_{ji}^* = X_{ji} - \hat\rho X_{j,i-1}$，$j=1,2,\cdots,k$，$\hat u_i = Y_i - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i} - \ \cdots\ - \beta_k X_{ki}$ である。

最小化のための一階の条件は，

$$\frac{S(\hat\beta_1,\ \hat\beta_2,\ \cdots,\ \hat\beta_k,\ \hat\rho)}{\hat\beta_j}=0, \qquad j=1,2,\cdots,k$$

$$\frac{S(\hat\beta_1,\ \hat\beta_2,\ \cdots,\ \hat\beta_k,\ \hat\rho)}{\hat\rho}=0$$

であり，具体的に計算すると，

$$\frac{S(\hat\beta_1,\ \hat\beta_2,\ \cdots,\ \hat\beta_k,\ \hat\rho)}{\hat\beta_j}=-2\sum_{i=2}^n X_{ji}^*(Y_i^* - \hat\beta_1 X_{1i}^* - \hat\beta_2 X_{2i}^* - \ \cdots\ - \hat\beta_k X_{ki}^*)=0,$$

$$j=1,2,\cdots,k$$

$$\frac{S(\hat\beta_1,\ \hat\beta_2,\ \cdots,\ \hat\beta_k,\ \hat\rho)}{\hat\rho}=-2\sum_{i=2}^n \hat u_{i-1}(\hat u_i - \hat\rho\hat u_{i-1})=0$$

となる。$(k+1)$ 本の連立方程式から，$\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\cdots$, $\hat{\beta}_k$, $\hat{\rho}$ が得られる。単回帰のときと同様に，収束計算によって求めることになる。$\longrightarrow$ コクラン＝オーカット法 (Cochrane-Orcutt estimation)

簡便法：ρ の求め方：　より簡単なもう一つの方法として，DW は近似的に $DW \approx 2(1-\widehat{\rho})$ と表されるので，DW は近似的に $DW \approx 2(1-\widehat{\rho})$ と表されるので，DW から $\widehat{\rho}$ を逆算して求める。そして，$Y_i^* = Y_i - \widehat{\rho} Y_{i-1}$，$X_{1i}^* = X_{1i} - \widehat{\rho} X_{1,i-1}$，$X_{2i}^* = X_{2i} - \widehat{\rho} X_{2,i-1}$，$\cdots$，$X_{ki}^* = X_{ki} - \widehat{\rho} X_{k,i-1}$ を新たな変数として，

$$Y_i^* = \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^* + \cdots + \beta_k X_{ki}^* + \epsilon_i,$$

に最小二乗法を適用する。

9.2　不均一分散 (不等分散)

9.2.1　不均一分散 (不等分散) の意味と推定方法

回帰式が

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

の場合を考える。X_i が外生変数，Y_i は内生変数，u_i は互いに独立な同一の分布を持つ攪乱項 (最小二乗法に必要な仮定) とする。「独立な同一の分布」の意味は「攪乱項 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ はそれぞれ独立に平均ゼロ，分散 σ^2 の分布する」である。

分散が時点に依存する場合，代表的には，分散が他の変数 (例えば，z_i) に依存する場合，すなわち，u_i の平均はゼロ，分散は $\sigma_*^2 z_i^2$ の場合は，最小二乗法の仮定に反する。そのため，単純には，$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ に最小二乗法を適用できない。以下のような修正が必要となる。

$$\begin{aligned}
\frac{Y_i}{z_i} &= \alpha\frac{1}{z_i} + \beta\frac{X_i}{z_i} + \frac{u_i}{z_i} \\
&= \alpha\frac{1}{z_i} + \beta\frac{X_i}{z_i} + u_i^*
\end{aligned}$$

このとき，新たな攪乱項 u_i^* は平均ゼロ，分散 σ_*^2 の分布となる (すなわち,「同一の」分布)。

$$\mathrm{E}(u_i^*) = \mathrm{E}\left(\frac{u_i}{z_i}\right) = \left(\frac{1}{z_i}\right)\mathrm{E}(u_i) = 0$$

u_i の仮定 $\mathrm{E}(u_i) = 0$ が使われている。

$$\mathrm{V}(u_i^*) = \mathrm{V}\left(\frac{u_i}{z_i}\right) = \left(\frac{1}{z_i}\right)^2 \mathrm{V}(u_i) = \sigma_*^2$$

u_i の仮定 $\mathrm{V}(u_i) = \sigma_*^2 z_i^2$ が最後に使われている。

よって，$\dfrac{Y_i}{z_i}, \dfrac{1}{z_i}, \dfrac{X_i}{z_i}$ を新たな変数として，最小二乗法を適用することができる。

不均一分散の検定について

$$\hat{u}_i^2 = \gamma z_i^2 + \epsilon_i$$

を推定し，γ の推定値 $\hat{\gamma}$ の有意性の検定を行う (通常の t 検定)。

z_i は回帰式に含まれる変数でもよい。例えば，u_i の平均はゼロ，分散は $\sigma_*^2 X_i^2$ の場合，各変数を X_i で割って，

$$\begin{aligned}\frac{Y_i}{X_i} &= \alpha\frac{1}{X_i} + \beta + \frac{u_i}{X_i} \\ &= \alpha\frac{1}{X_i} + \beta + u_i^*\end{aligned}$$

を推定すればよい。β は定数項として推定されるが，意味は限界係数 (すなわち，傾き) と同じなので注意すること。

9.2.2　最小二乗推定量の分散について

単回帰

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i, \qquad n = 1, 2, \cdots, n$$

仮定：$\mathrm{E}(u_i) = 0$