$$\mathrm{V}(u_i) = \mathrm{E}(u_i^2) = \sigma_i^2 \longleftarrow \text{この仮定追加}$$
$$i \neq j \text{ について，} \mathrm{Cov}(u_i, u_j) = \mathrm{E}(u_i u_j) = 0$$

不均一分散を無視して，通常の最小二乗推定量は,

$$\hat{\beta} = \sum_i \omega_i Y_i = \beta + \sum_i \omega_i u_i$$

である。ただし，$\omega_i = \dfrac{X_i - \overline{X}}{\sum_j (X_j - \overline{X})^2}$

$\mathrm{E}(\hat{\beta})$ について,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\hat{\beta}) &= \mathrm{E}(\beta + \sum_i \omega_i u_i) \\ &= \beta + \sum_i \omega_i \mathrm{E}(u_i) = \beta\end{aligned}$$

$u_1, u_2, \cdots, u_n$ の分散が不均一であっても，$\hat{\beta}$ は不偏推定量となる。

$\mathrm{V}(\hat{\beta})$ について，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\hat{\beta}) &= \mathrm{V}(\beta + \sum_i \omega_i u_i) = \mathrm{V}(\sum_i \omega_i u_i) \\
&= \mathrm{E}((\sum_i \omega_i u_i)^2) \quad \longleftarrow \text{分散の定義} \\
&= \mathrm{E}((\sum_i \omega_i u_i)(\sum_j \omega_j u_j)) \quad \longleftarrow \text{添字一つ変更} \\
&= \mathrm{E}(\sum_i \sum_j \omega_i \omega_j u_i u_j) \\
&= \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \mathrm{E}(u_i u_j) \\
&= \sum_i \omega_i^2 \mathrm{E}(u_i^2) + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \omega_i \omega_j \mathrm{E}(u_i u_j) \\
&= \sum_i \sigma_i^2 \omega_i^2 \neq \sigma^2 \sum_i \omega_i^2
\end{aligned}
$$

したがって，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ の分散が不均一であるとき，通常の最小二乗推定

量 $\hat{\beta}$ の分散の推定量は，$s_i^2 \sum_i \omega_i^2$ とならなければならない。

s_i^2 は σ_i^2 の推定量とする。

しかし，計量ソフトは $s^2 \sum_i \omega_i^2$ と計算する。

9.3　多重共線性について

回帰式が

$$Y_i = \alpha W_i + \beta X_i + u_i$$

の場合を考える。W_i, X_i が外生変数，Y_i は内生変数，u_i は互いに独立な攪乱項とする。$W_i = 1$ のとき，α は定数項となる。

W_i と X_i の相関が大きいことを多重共線性が強いと言う。

W_i と X_i の相関が大きい場合は，α, β の推定値は不安定になる。

極端な場合，W_i と X_i の相関が 1 の場合 (完全相関の場合) は，すべての i について，$W_i = \gamma X_i$ となる。この場合，回帰式は

$$Y_i = \alpha W_i + \beta X_i + u_i$$

$$= (\alpha\gamma + \beta)X_i + u_i$$

となり，$\alpha\gamma + \beta$ を推定することは可能だが，α, β を別々に推定することはできなくなる。$Y_i = \alpha W_i + \beta X_i + u_i$ を推定した場合，$\alpha\gamma + \beta$ の推定値が一定値となる $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の組み合わせは無数に存在する。この意味で，$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は不安定であると言える。

厳密には，最小二乗法によると，

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha W_i - \beta X_i)^2$$

を最小にする α, β をその推定値 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ とする。

すなわち，

$$\frac{\partial \sum u_i^2}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha W_i - \beta X_i) W_i = 0$$

$$\frac{\partial \sum u_i^2}{\partial \beta} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha W_i - \beta X_i) X_i = 0$$

の連立方程式を解くことになる。

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i W_i - \hat{\alpha} \sum_{i=1}^{n} W_i^2 - \hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i W_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \hat{\alpha} \sum_{i=1}^{n} W_i X_i - \hat{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$$

行列表示により，

$$\begin{pmatrix} \sum Y_i W_i \\ \sum Y_i X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum W_i^2 & \sum X_i W_i \\ \sum W_i X_i & \sum X_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$$

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ について表すと，

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum W_i^2 & \sum X_i W_i \\ \sum W_i X_i & \sum X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_i W_i \\ \sum Y_i X_i \end{pmatrix}$$

逆行列を計算して，

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{(\sum W_i^2)(\sum X_i^2) - (\sum W_i X_i)^2} \times \begin{pmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i W_i \\ -\sum W_i X_i & \sum W_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum Y_i W_i \\ \sum Y_i X_i \end{pmatrix}$$

完全な多重共線性の場合 ($W_i = \gamma X_i$ の場合),

$$(\sum W_i^2)(\sum X_i^2) - (\sum W_i X_i) = 0$$

となる。

　また,

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathrm{V}(\hat{\alpha}) & \mathrm{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & \mathrm{V}(\hat{\beta}) \end{pmatrix} \\
&= \sigma^2 \begin{pmatrix} \sum W_i^2 & \sum X_i W_i \\ \sum W_i X_i & \sum X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{\sigma^2}{(\sum W_i^2)(\sum X_i^2) - (\sum W_i X_i)^2} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i W_i \\ -\sum W_i X_i & \sum W_i^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるので，完全な多重共線性の場合は，推定値の分散が無限大となる。推定値の分散が無限大という意味は，どこにパラメータがあるか分からないということを意味する。

簡単化のため，$\overline{W} = \dfrac{1}{n}\sum W_i = 0$，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum X_i = 0$ とする。W_i と X_i との相関係数を r とすると，

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{\sum(W_i - \overline{w})(X_i - \overline{X})}{\sqrt{\sum(W_i - \overline{W})^2 \sum(X_i - \overline{X})^2}} \\
&= \frac{\sum W_i X_i}{\sqrt{\sum W_i^2 \sum X_i^2}}
\end{aligned}
$$

となる。さらに，r を用いて，$\mathrm{V}(\hat{\alpha})$，$\mathrm{V}(\hat{\beta})$ を求めると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\hat{\alpha}) &= \frac{\sigma^2 \sum X_i^2}{(\sum W_i^2)(\sum X_i^2) - (\sum W_i X_i)^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{(1 - r^2)\sum W_i^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\hat{\beta}) &= \frac{\sigma^2 \sum W_i^2}{(\sum W_i^2)(\sum X_i^2) - (\sum W_i X_i)^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{(1 - r^2)\sum X_i^2}
\end{aligned}
$$

が得られる。

これは，r が 1 または -1 に近づくにつれて (または，r^2 が 1 に近づくにつれて)，$\mathrm{V}(\hat{\alpha})$，$\mathrm{V}(\hat{\beta})$ は大きくなるということを意味する。

$\Longrightarrow$ 係数の推定値の有意性が低くなる。

$\Longrightarrow$ 本来は W_i や X_i が Y_i に影響を与えているにもかかわらず，統計的に有意な推定値は得られなくなるので，回帰分析によって理論モデルを立証しようという試みは成功しなくなる。

多重共線性の症状： 多重共線性が起こっていると考えられるケースは，

1. 推定値の符号が理論と合わない。
2. 決定係数 (R^2 や $\overline{R}^2$) は大きいのに，個々の t 値は小さい。
3. 観測値の数 (データ数) を少し増やすと，推定値が大きく変わる。
4. 説明変数を増減すると，推定値が大きく変動する。

等である。

9.4　F 検定について

複数の線形制約の検定を行う場合に F 検定が用いられる。

9.4.1　いくつかの例

例 1：コブ＝ダグラス型生産関数：　Q_i は生産量，K_i は資本，L_i は労働とする。生産関数を推定する。

$$\log(Q_i) = \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + \beta_3 \log(L_i) + u_i,$$

において，一次同時の制約 $\beta_2 + \beta_3 = 1$ を検定したい。すなわち，帰無仮説，対立仮説は以下のように表される。

帰無仮説 H_0：$\beta_2 + \beta_3 = 1$,
対立仮説 H_1：$\beta_2 + \beta_3 \neq 1$,