例 2：**構造変化の検定**：　n_0 期以前と n_0+1 期以降とで経済構造が変化したと考えて推定を行う。しかも，定数項，傾き共に変化したと想定した場合，回帰式は以下のようになる。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma D_i + \delta D_i X_i + u_i,$$

ただし，

$$D_i = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \cdots, n_0 \text{ のとき}, \\ 1, & i = n_0+1, n_0+2, \cdots, n \text{ のとき}, \end{cases}$$

とする。構造変化が n_0+1 期で起こったかどうかを検定したい。すなわち，帰無仮説，対立仮説は以下のように表される。

帰無仮説 H_0：$\gamma = \delta = 0$,
対立仮説 H_1：$\gamma \neq 0$，または，$\delta \neq 0$,

例 3：**多重回帰モデルの係数の同時検定**：　2 つの説明変数が含まれる場合を考える。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma Z_i + u_i,$$

のモデルにおいて，X_i と Z_i のどちらも，Y_i に影響を与えていないという仮説を検定したい。この場合，帰無仮説，対立仮説は以下のように表される。

帰無仮説 H_0：$\beta = \gamma = 0$,

対立仮説 H_1：$\beta \neq 0$，または，$\gamma \neq 0$,

9.4.2　統計学の復習

$U \sim \chi^2(n)$，$V \sim \chi^2(m)$，U と V は独立とする。

このとき，

$$F = \frac{U/n}{V/m} \sim F(n, m)$$

となる。

9.4.3　検定の方法

多重回帰モデル

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i,$$

において，パラメータ $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ に何らかの制約が妥当かどうかを検定する。

制約の数を G 個とする。

全く制約の無い場合に得られた残差を $\hat{u}_i$ とする。

制約を含めて推定されたときの残差を $\widetilde{u}_i$ とする。

すなわち，

帰無仮説 H_0： $\beta_{k-G+1} = \cdots = \beta_k = 0$,

対立仮説 H_1：H_0 でない。

を検定する場合，

$$
\begin{aligned}
Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_{k-G} X_{k-G,i} \\
+ \beta_{k-G+1} X_{k-G+1,i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i,
\end{aligned}
$$

の推定によって得られた残差を $\hat{u}_i$ (制約なし残差) とおき，

$$
Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_{k-G} X_{k-G,i} + u_i,
$$

の推定によって得られた残差を $\widetilde{u}_i$ (制約付き残差) とする。

1. H_0 が真のとき，$\dfrac{\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(G)$ となる。(証明略)

2. また，$\dfrac{\sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$ となる。(証明略)

3. さらに，$\dfrac{\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2}$ と $\dfrac{\sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2}$ とは独立に分布する。(証明略)

4. したがって，この場合，

$$\frac{(\sum \widetilde{u}_i^2 - \sum \hat{u}_i^2)/G}{\sum \hat{u}_i^2/(n-k)} \sim F(G, n-k),$$

となる。(証明略)

例 1：**コブ＝ダグラス型生産関数**：

制約なしの場合：

$$\log(Q_i) = \beta_1' + \beta_2 \log(K_i) + \beta_3 \log(L_i) + u_i,$$

$\beta_2 + \beta_3 = 1$ の制約ありの場合：

$$\log(\frac{Q_i}{L_i}) = \beta_1' + \beta_2 \log(\frac{K_i}{L_i}) + u_i,$$

例 2： **構造変化の検定**：

制約なしの場合：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma D_i + \delta D_i X_i + u_i,$$

$\gamma = \delta = 0$ の制約ありの場合：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i,$$

例 3： **多重回帰モデルの係数の同時検定**：

制約なしの場合：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma Z_i + u_i,$$

$\beta = \gamma = 0$ の制約ありの場合：

$$Y_i = \alpha + u_i,$$

9.5　説明変数と誤差項に相関がある場合

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

(1) X_i は非確率変数 $\longrightarrow$ 今までの最小二乗推定量

(2) X_i は確率変数

(2a) X_i と u_i は相関なし $\longrightarrow$ $\sigma_{xu} = \mathrm{Cov}(X_i, u_i) = 0$

(2b) X_i は u_i は相関あり $\longrightarrow$ $\sigma_{xu} = \mathrm{Cov}(X_i, u_i) \neq 0$

$$\min_{\hat{\alpha},\,\hat{\beta}} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2$$

となるような $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を求める（最小自乗法）。

(4.1) 式，(4.2) 式によって，$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は，

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0,$$

を満たす。

9.6　応用例

9.6.1　マクロの消費関数

1. 所得から税金を差し引いたものを可処分所得と呼ぶが，可処分所得 (Y) が増えれば消費 (C) も増える。
2. この関数を $C = \alpha + \beta Y$ という線形 (一次式) によって表されると仮定しよう。
3. この場合，経済学では，α は基礎消費，β は限界消費性向と呼ばれる。
4. α で表される基礎消費とは所得がなくても日常生活に最低限必要な消費 (すなわち，衣食住宅費等) であり，β の限界消費性向とは所得が 1 円増えれば消費はいくら増えるのかという指標である。
5. α, β はパラメータと呼ばれ，未知である。

6. C や Y は『国民経済計算年報』(経済企画庁編) から「国内家計最終消費支出」「家計国民可処分所得」という項目で，それぞれデータは公表される。

7. ここでは，平成10年版の『国民経済計算年報』のデータを扱う。

1. 『国民経済計算年報』から「国内家計最終消費支出」と「家計国民可処分所得」の1970年〜1996年の年次データ (時系列データの種類は年次データ，四半期データ，月次データ等がある) を取ってくる。

2. 計量分析で重要なことは，**名目値**でなく**実質値**をとるということである。

3. 実質値とはある基準となる年を定めて，その年の物価で生のデータ (名目値) を変換するということである。

4. 実質値 $= \dfrac{\text{名目値}}{\text{物価指数}}$ という関係が成り立つ。(ここでの「物価指数」は基準年次を1とした場合のもので，もし基準年次が100ならば，実質値 $= \dfrac{\text{名目値}}{\text{物価指数}/100}$ とする必要がある。)

表 9.1: 所得と消費のデータ

暦年	国内家計最終支出	家計可処分所得	国内家計最終支出デレータ
1970	37784.1	45913.2	35.2
1971	42571.6	51944.3	37.5
1972	49124.1	60245.4	39.7
1973	59366.1	74924.8	44.1
1974	71782.1	93833.2	53.3
1975	83591.1	108712.8	59.4
1976	94443.7	123540.9	65.2
1977	105397.8	135318.4	70.1
1978	115960.3	147244.2	73.5
1979	127600.9	157071.1	76.0
1980	138585.0	169931.5	81.6
1981	147103.4	181349.2	85.4
1982	157994.0	190611.5	87.7
1983	166631.6	199587.8	89.5
1984	175383.4	209451.9	91.8
1985	185335.1	220655.6	93.9
1986	193069.6	229938.8	94.8
1987	202072.8	235924.0	95.3
1988	212939.9	247159.7	95.8
1989	227122.2	263940.5	97.7
1990	243035.7	280133.0	100.0

5. 異なる時点間でデータを比較する場合，それぞれの時点で物価が異なるので，物価の変動を取り除いたデータで比較する必要がある。

6. ここで用いられる国内家計最終消費支出 C_i と家計国民可処分所得 Y_i のデータは名目データであり，実質データに変換する必要がある。

7. 1990年の「国内家計最終消費支出デフレータ」は100なので，基準年次は1990年となる。

8. 1990年の貨幣価値に変換することを，1990年価格で実質化すると言う。

まず最初に，

$$C_i = \alpha + \beta Y_i + u_i, \qquad u_i \sim N(0, \sigma^2),$$

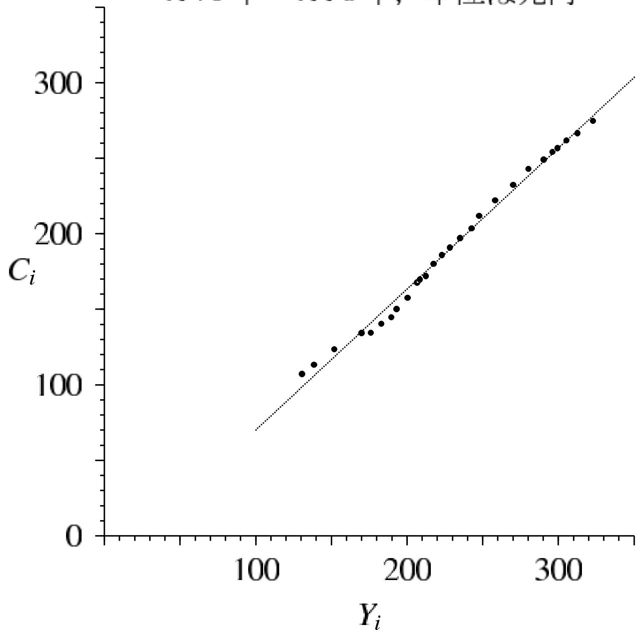
の推定を行う。ただし，u_i は互いに独立に正規分布するものと仮定する。

$$C_i = \underset{(3844.54)}{-23216.7} + \underset{(.016333)}{.933542}\, Y_i,$$

$$R^2 = .992406, \quad \overline{R}^2 = .992102,$$

図 9.1: 実質消費 (縦軸) と実質所得 (横軸)

1970 年〜1996 年，単位は兆円



$$s = 4557.04, \quad DW = .289838,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は，係数推定値の標準誤差を表すものとする。

1. 推定値の符号条件について，基礎消費の推定値 $\hat{\alpha}$ は -23216.7 で負，限界消費性向の推定値 $\hat{\beta}$ は 0.933542 で正となっている。基礎消費については符号条件を満たさないが，限界消費性向は符号条件を満たす。

2. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ から，α, β の符号を統計的に調べる。

   (a) データ数は 27，推定すべきパラメータ数は 2 なので，自由度は $27 - 2 = 25$ となる。

   (b) $\alpha = 0.05$ のとき $t_{\alpha/2}(25) = 2.060$，$\alpha = 0.01$ のとき $t_{\alpha/2}(25) = 2.787$ である。

   (c) 有意水準 0.05 のとき，H_0：$\alpha = 0$，H_1：$\alpha \neq 0$ の結果は，

$$\frac{-23216.7}{3844.54} = -6.039 < -t_{0.025}(25) = -2.060,$$

有意水準 0.05 のとき，H_0：$\beta = 0$，H_1：$\beta \neq 0$ の結果は，

$$\frac{.933542}{.016333} = 57.16 > t_{0.025}(25) = 2.060,$$

となり，共に統計的に有意である。

(d) したがって，実証結果から，真の基礎消費 α は負，真の限界消費性向 β は正という結論になる。

(e) $\beta > 0$ を統計的に示したが，本当は $\beta < 1$ も示すべきである。すなわち，H_0：$\beta = 1$，H_1：$\beta \neq 1$ も検定すべきである。(省略)

(f) 基礎消費は正となるべきなので，経済理論と矛盾する。

(g) 次に行うべき分析は，なぜ矛盾したかを追求すること。
$\Longrightarrow$ 最初に考えた理論が間違っていた，構造変化のためだった，推定式が最小二乗法の仮定を満たしていなかった，　・

3. $s = 4557.04$ は，誤差項 u_i の標準偏差 σ^2 の推定値 (すなわち，回帰の標準誤差) である。

4. 自由度修正済み決定係数は $\overline{R}^2 = 0.992102$ であり，非常に 1 に近い値が

得られたことから，消費と所得の間の関係を表す回帰式の当てはまりは非常に良いと言える。

5. DW について，$n = 27, k = 2$ の 5% 点の値は $dl = 1.32, du = 1.47$ であるので，5% で，

   (a) $DW < 1.32$ のとき，誤差項に正の系列相関がある。

   (b) $1.32 \leq DW < 1.47$ のとき，判定不能。

   (c) $1.47 \leq DW < 2.53$ のとき，誤差項に系列相関はない。

   (d) $2.53 \leq DW < 2.68$ のとき，判定不能。

   (e) $2.68 \leq DW$ のとき，誤差項に負の系列相関がある。

   となる。

   この場合，$DW = 0.289838$ なので，誤差項に正の系列相関が見られる。

   $\Longrightarrow$ 最小二乗法の仮定を満たしていない。

   $\Longrightarrow$ $t(25)$ 分布を検定に使うことができないので，今までの検定結果は間違っている可能性がある。

次に，誤差項に系列相関 (一階の自己相関) があるモデル

$$C_i = \alpha + \beta Y_i + u_i,$$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \epsilon_i,$$

の推定を行う。ただし，ϵ_i は互いに独立に正規分布するものと仮定する。

ρ の推定値 $\hat{\rho}$ は，最小二乗法の推定結果の DW を用いて，$\hat{\rho} = 1 - \dfrac{DW}{2} = 1 - \dfrac{.2898375}{2} = .855081$ を得る。データを，次のように変換する。

$$C_i^* = C_i - \hat{\rho} C_{i-1},$$

$$Y_i^* = Y_i - \hat{\rho} Y_{i-1},$$

そして，

$$C_i^* = \alpha' + \beta Y_i^* + \epsilon_i, \qquad \epsilon_i \sim N(0, \sigma_\epsilon^2),$$

を推定する。ただし，$\alpha' = \alpha(1 - \rho)$ に注意。

結果は，以下の通りとなる。

$$C_i^* = \underset{(2183.63)}{-3679.78} + \underset{(.054012)}{.930350}\ Y_i^*,$$

$$R^2 = .922288, \quad \overline{R}^2 = .919180,$$

$$s = 2232.08, \quad DW = 1.35684,$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は，係数推定値の標準誤差を表すものとする。

1. この場合，データ数は26，推定すべきパラメータ数は2なので，自由度は $26-2=24$ となる。

2. 基礎消費の推定値 $\hat{\alpha}$ は，$\hat{\alpha} = \dfrac{\hat{\alpha}'}{1-\hat{\rho}}$ によって求められ，$\dfrac{-3679.78}{1-.855081} = -25392.0$ で負，限界消費性向の推定値 $\hat{\beta}$ は .930350 で正となる。

3. 真の基礎消費の符号を統計的に調べる。基礎消費 α の符号は α' の符号と同じなので，α' の符号を $\hat{\alpha}'$ から調べる。

有意水準 0.05 のとき，

$$\frac{-3679.78}{2183.63} = -1.685 > -t_{0.025}(24) = -2.064,$$

となり，α' が負だとは言えない。

4. α は正の可能性もある。

5. したがって，推定結果から，最初に考えた理論モデルが間違っているとは言えない。

6. β について，有意水準 0.05 のとき，

$$\frac{.930350}{.054012} = 17.225 > t_{0.025}(24) = 2.064,$$

となり，統計的に有意である。

7. $s = 2232.08$ は，誤差項 ϵ_i の標準偏差 σ_ϵ^2 の推定値 (すなわち，回帰の標準誤差) である。

8. 自由度修正済み決定係数 $\overline{R}^2$ について，最初の推定結果では 0.992102 となり，今回の推定結果では .919180 と小さくなっている。

   $\Longrightarrow$ 「回帰式の当てはまりが悪くなった」と考えるのは間違い。

   被説明変数の値自体が，最初の推定結果と今回のものとでは異なるため，$\overline{R}^2$ の比較は不適当。

   $\Longrightarrow$ 回帰の標準誤差 (4557.04 と 2232.08) で比較すべき。後者の方が小さいため，後者の方が回帰式の当てはまりは良いと言える。

9. DW も 1.35684 となり，$1.32 \le DW < 1.47$ であるので，系列相関の有無を判定できない。

   $\Longrightarrow$ 「明らかに誤差項に系列相関がある」とは言えない。

   $\Longrightarrow$ この式で，信頼区間，仮説検定を行うべき。

● Stata による出力結果

データは，

http://www2.econ.osaka-u.ac.jp/~tanizaki/class/2011/econome/cons.csv

からダウンロード可

```
----------------------------------------------------------

. tsset year
        time variable:  year, 1970 to 1996
                delta:  1 unit

. gen ryd=yd/(pcons/100)

. gen rcons=cons/(pcons/100)

. reg rcons ryd

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      27
-------------+------------------------------           F(  1,    25) = 3267.05
       Model |  6.7845e+10     1  6.7845e+10           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  519164248    25  20766569.9           R-squared     =  0.9924
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9921
       Total |  6.8365e+10    26  2.6294e+09           Root MSE      =    4557

------------------------------------------------------------------------------
       rcons |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         ryd |   .9335422   .0163326    57.16   0.000     .8999045    .9671799
       _cons |  -23216.75   3844.539    -6.04   0.000    -31134.72   -15298.77
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  2,    27) =  .2898375

. gen rho=1-0.5*.2898375

. gen drcons=rcons-rho*l.rcons
```

```
(1 missing value generated)

. gen dryd=ryd-rho*l.ryd
(1 missing value generated)

. reg drcons dryd

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      26
-------------+------------------------------           F(  1,    24) =  261.29
       Model |  1.3558e+09     1  1.3558e+09           Prob > F      =  0.0000
    Residual |   124530197    24  5188758.21           R-squared     =  0.9159
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9124
       Total |  1.4803e+09    25    59212957           Root MSE      =  2277.9

------------------------------------------------------------------------------
      drcons |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        dryd |   .9315055   .0576262    16.16   0.000     .8125708     1.05044
       _cons |  -3731.757   2353.261    -1.59   0.126    -8588.649    1125.134
------------------------------------------------------------------------------
```

途中で，

$\mathrm{DRCONS}_i = \mathrm{RCONS}_i - \hat{\rho}\,\mathrm{RCONS}_{i-1}$

$\mathrm{DRY}_i = \mathrm{RY}_i - \hat{\rho}\,\mathrm{RY}_{i-1}$

として，データを変換（ただし，$\hat{\rho} = 1 - .5DW = 1 - .5 \times .2898375$）

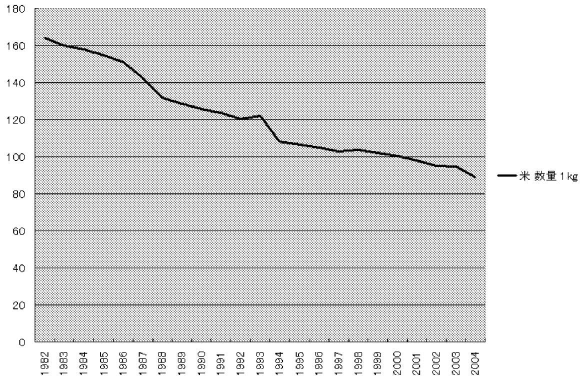
9.6.2　ミクロの消費関数（需要関数）

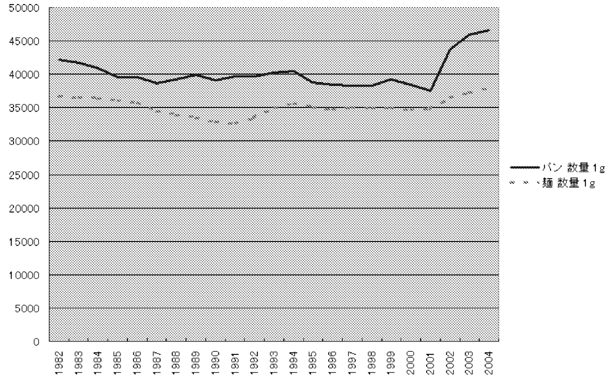
米，パン，麺の選択を考える。

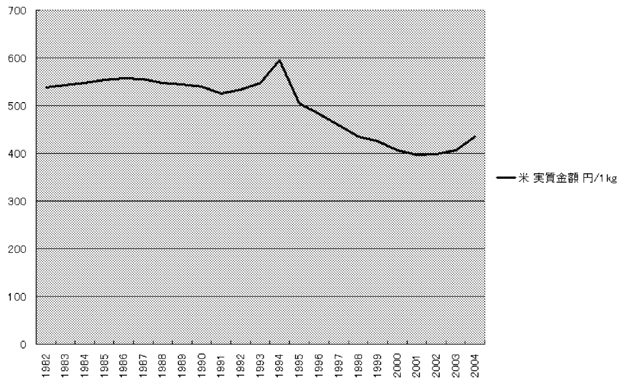
1世帯当たり年間の品目別支出金額，購入数量
及び平均価格（全世帯・勤労者世帯）

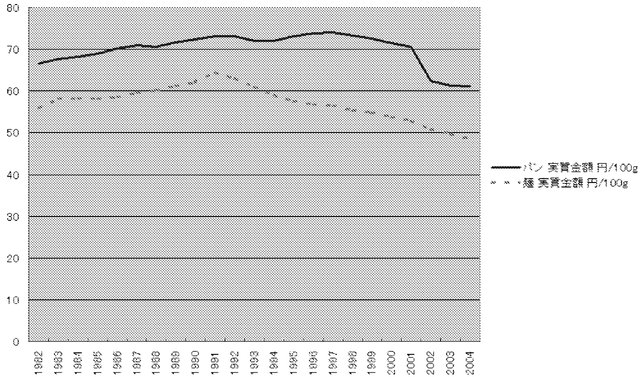
年	米		パン		麺		総支出額	消費者物価指数(全国総合)
	数量 1kg	金額 1kg	数量 1g	金額 100g	数量 1g	金額 100g		
i	Q_{1i}	P_{1i}	Q_{2i}	P_{2i}	Q_{3i}	P_{3i}	E_i	P_i
1982	164.22	435.98	42161	54.04	36854	45.32	3038024	0.811
1983	160.14	448.20	41745	55.88	36492	47.97	3114247	0.825
1984	158.06	461.69	40890	57.62	36500	49.21	3195829	0.844
1985	154.51	477.41	39545	59.42	36099	50.20	3277373	0.861
1986	150.96	482.80	39532	60.86	35859	50.74	3316493	0.867
1987	142.60	482.67	38710	61.53	34576	51.83	3371326	0.868
1988	132.04	478.40	39218	61.75	33971	52.65	3493468	0.874
1989	128.40	486.37	39927	63.99	33603	54.71	3592205	0.893
1990	125.78	497.33	39157	66.71	32890	57.14	3734084	0.921
1991	123.82	499.36	39659	69.57	32615	61.44	3925358	0.951
1992	120.58	516.05	39697	70.75	33401	61.06	4003931	0.967
1993	121.93	536.85	40209	70.51	35085	59.80	4022955	0.979
1994	107.99	587.50	40458	71.08	35760	58.37	4006086	0.986
1995	106.42	496.64	38766	71.97	35096	56.77	3948741	0.985
1996	104.91	476.26	38436	72.74	34804	55.90	3946187	0.986
1997	102.81	460.70	38333	74.39	35061	56.77	3999759	1.004
1998	103.53	439.24	38287	74.10	34956	55.98	3938235	1.010
1999	101.99	427.60	39246	73.00	34963	55.37	3876091	1.007
2000	100.40	406.82	38480	71.47	34722	53.83	3805600	1.000
2001	97.83	394.67	37554	70.12	34753	52.52	3704298	0.993
2002	95.15	391.28	43727	61.34	36493	50.11	3673550	0.984
2003	94.83	398.37	45876	60.12	37302	48.93	3631473	0.981
2004	89.02	426.12	46653	59.92	37957	47.72	3650436	0.981

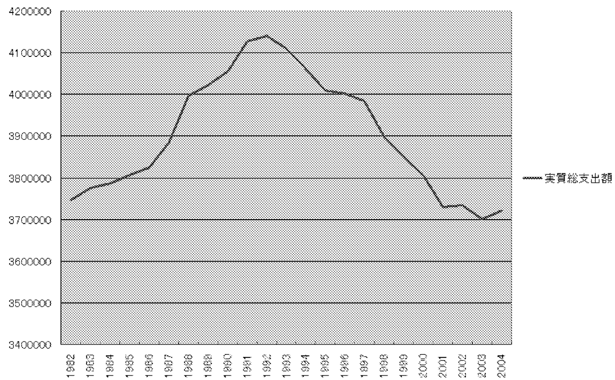
出所　『消費者物価指数年報 (平成16年)』(日本銀行) ← P_i
　　　『家計調査年報 (平成16年)』(総務省統計局) ← その他


180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
2004
米 数量1kg


50000
45000
40000
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
2004
パン 数量1g
麺 数量1g


700
600
500
400
300
200
100
0
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
2004
米 実質金額 円/1kg


80
70
60
50
40
30
20
10
0
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
2004
パン 実質金額 円/100g
麺 実質金額 円/100g



●線型関数

$$Q_{1i} = \underset{(8.89)}{397.0} - \underset{(9.35)}{0.00018}\frac{E_i}{P_i} + \underset{(4.39)}{0.194}\frac{P_{1i}}{P_i}$$

$$+ \underset{(0.29)}{0.184}\frac{P_{2i}}{P_i} + \underset{(5.57)}{5.614}\frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 6.86, \quad R^2 = 0.932, \quad \overline{R}^2 = 0.917, \quad DW = 1.532$$

$$Q_{2i} = \underset{(13.9)}{61946.7} + \underset{(4.62)}{0.00893}\frac{E_i}{P_i} + \underset{(0.91)}{4.014}\frac{P_{1i}}{P_i} - \underset{(11.4)}{710.4}\frac{P_{2i}}{P_i} - \underset{(1.51)}{152.5}\frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 685.1,\quad R^2 = 0.931,\quad \bar{R}^2 = 0.915,\quad DW = 1.334$$

$$Q_{3i} = \underset{(16.9)}{56642.5} - \underset{(0.67)}{0.00098}\frac{E_i}{P_i} + \underset{(5.40)}{17.9}\frac{P_{1i}}{P_i} - \underset{(1.04)}{48.8}\frac{P_{2i}}{P_i} - \underset{(5.32)}{403.6}\frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 515.7,\quad R^2 = 0.885,\quad \bar{R}^2 = 0.860,\quad DW = 1.044$$

●対数線型

$$\log Q_{1i} = \underset{(10.4)}{70.9} - \underset{(10.4)}{5.35}\log\frac{E_i}{P_i} + \underset{(4.53)}{0.705}\log\frac{P_{1i}}{P_i} - \underset{(0.06)}{0.018}\log\frac{P_{2i}}{P_i} + \underset{(6.46)}{2.68}\log\frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 0.048,\quad R^2 = 0.949,\quad \bar{R}^2 = 0.937,\quad DW = 1.713$$

$$\begin{aligned}\log Q_{2i} = &\underset{(1.88)}{4.35} + \underset{(4.33)}{0.753}\log\frac{E_i}{P_i} + \underset{(1.21)}{0.063}\log\frac{P_{1i}}{P_i}\\ &- \underset{(10.9)}{1.135}\log\frac{P_{2i}}{P_i} - \underset{(1.31)}{0.184}\log\frac{P_{3i}}{P_i}\end{aligned}$$

$$s = 0.016,\quad R^2 = 0.931,\quad \bar{R}^2 = 0.916,\quad DW = 1.317$$

$$\begin{aligned}\log Q_{3i} = &\underset{(6.87)}{14.5} - \underset{(1.19)}{0.188}\log\frac{E_i}{P_i} + \underset{(5.51)}{0.266}\log\frac{P_{1i}}{P_i}\\ &- \underset{(0.27)}{0.025}\log\frac{P_{2i}}{P_i} - \underset{(5.30)}{0.682}\log\frac{P_{3i}}{P_i}\end{aligned}$$

$$s = 0.015,\quad R^2 = 0.883,\quad \bar{R}^2 = 0.856,\quad DW = 1.067$$

●対数線型 (変数を減らす)

$$\log Q_{1i} = \underset{(10.9)}{70.9} - \underset{(11.2)}{5.36}\log\frac{E_i}{P_i} + \underset{(5.23)}{0.709}\log\frac{P_{1i}}{P_i}$$

$$+ \underset{(7.69)}{2.67} \log \frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 0.047, \quad R^2 = 0.949, \quad \overline{R}^2 = 0.941, \quad DW = 1.724$$

$$\log Q_{3i} = \underset{(7.24)}{14.7} - \underset{(1.35)}{0.200} \log \frac{E_i}{P_i} + \underset{(6.45)}{0.271} \log \frac{P_{1i}}{P_i}$$

$$- \underset{(6.49)}{0.700} \log \frac{P_{3i}}{P_i}$$

$$s = 0.014, \quad R^2 = 0.882, \quad \overline{R}^2 = 0.863, \quad DW = 1.122$$

● Stata による出力結果

データは,

`http://www2.econ.osaka-u.ac.jp/~tanizaki/class/2011/econome/demand.csv`

からダウンロード可

```
-----------------------------------------------------------


. tsset year
        time variable:  year, 1982 to 2004
                delta:  1 unit

. gen re=e/p

. gen rp1=p1/p

. gen rp2=p2/p

. gen rp3=p3/p

. reg q1 re rp1 rp2 rp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  4,    18) =   62.32
       Model |  11605.1437     4  2901.28592           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  837.923294    18  46.5512941           R-squared     =  0.9327
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9177
       Total |   12443.067    22  565.593953           Root MSE      =  6.8229

------------------------------------------------------------------------------
          q1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          re |  -.0001813   .0000192    -9.43   0.000    -.0002217   -.0001409
         rp1 |   .1935249    .043943     4.40   0.000      .101204    .2858457
         rp2 |   .1825145    .621349     0.29   0.772    -1.122891     1.48792
         rp3 |   5.623917   1.003036     5.61   0.000     3.516618    7.731217
       _cons |   397.3071   44.31083     8.97   0.000     304.2135    490.4007
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  5,    23) =  1.538178

. reg q2 re rp1 rp2 rp3
```

```
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  4,    18) =   60.62
       Model |   113479303     4  28369825.8           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  8424108.48    18  468006.027           R-squared     =  0.9309
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9155
       Total |   121903412    22  5541064.17           Root MSE      =  684.11

------------------------------------------------------------------------------
          q2 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          re |   .0089294   .0019288     4.63   0.000      .004877    .0129817
         rp1 |   3.975941   4.406052     0.90   0.379     -5.28083    13.23271
         rp2 |  -710.4687   62.30106   -11.40   0.000    -841.3584   -579.5791
         rp3 |  -152.1237   100.5718    -1.51   0.148    -363.4172    59.16979
       _cons |   61930.62   4442.933    13.94   0.000     52596.36    71264.87
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  5,    23) =  1.340373

. reg q3 re rp1 rp2 rp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  4,    18) =   34.82
       Model |  37006848.3     4  9251712.07           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  4782689.62    18  265704.979           R-squared     =  0.8856
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.8601
       Total |  41789537.9    22  1899524.45           Root MSE      =  515.47

------------------------------------------------------------------------------
          q3 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          re |    -.00097   .0014534    -0.67   0.513    -.0040234    .0020834
         rp1 |   17.89258    3.31989     5.39   0.000     10.91775    24.86741
         rp2 |  -48.87487   46.94286    -1.04   0.312    -147.4982    49.74843
         rp3 |  -403.4164   75.77925    -5.32   0.000    -562.6227   -244.2101
       _cons |   56606.16   3347.679    16.91   0.000     49572.95    63639.37
------------------------------------------------------------------------------
```

```
. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  5,    23) =  1.047824

. gen lq1=log(q1)

. gen lq2=log(q2)

. gen lq3=log(q3)

. gen lre=log(re)

. gen lrp1=log(rp1)

. gen lrp2=log(rp2)

. gen lrp3=log(rp3)

. reg lq1 lre lrp1 lrp2 lrp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  4,    18) =   84.42
       Model |  .766574852     4  .191643713           Prob > F      =  0.0000
    Residual |   .04086074    18  .002270041           R-squared     =  0.9494
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9381
       Total |  .807435592    22  .036701618           Root MSE      =  .04764

------------------------------------------------------------------------------
         lq1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         lre |  -5.355623   .5092073   -10.52   0.000    -6.425428   -4.285818
        lrp1 |   .7030891   .1547336     4.54   0.000     .3780058    1.028172
        lrp2 |    -.01919   .3056177    -0.06   0.951    -.6612689     .622889
        lrp3 |   2.687511   .4126367     6.51   0.000     1.820594    3.554429
       _cons |   70.90628    6.78413    10.45   0.000     56.65335    85.15921
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat
```

```
Durbin-Watson d-statistic(  5,    23) =  1.720916

. reg lq2 lre lrp1 lrp2 lrp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  4,    18) =   61.41
       Model |  .064720875     4  .016180219           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  .004742568    18  .000263476           R-squared     =  0.9317
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9166
       Total |  .069463442    22  .003157429           Root MSE      =  .01623

------------------------------------------------------------------------------
         lq2 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         lre |   .7530252   .1734795     4.34   0.000     .3885582    1.117492
        lrp1 |   .0633603   .0527155     1.20   0.245    -.0473909    .1741114
        lrp2 |  -1.135159   .1041195   -10.90   0.000    -1.353906   -.9164119
        lrp3 |  -.1838809   .1405793    -1.31   0.207    -.4792271    .1114654
       _cons |   4.346289   2.311255     1.88   0.076    -.5094776    9.202055
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  5,    23) =  1.323931

. reg lq3 lre lrp1 lrp2 lrp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  4,    18) =   33.83
       Model |  .029851208     4  .007462802           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  .003971008    18  .000220612           R-squared     =  0.8826
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.8565
       Total |  .033822216    22  .001537373           Root MSE      =  .01485

------------------------------------------------------------------------------
         lq3 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         lre |  -.1868154    .158742    -1.18   0.255      -.52032    .1466892
        lrp1 |   .2652044   .0482372     5.50   0.000     .1638618     .366547
        lrp2 |  -.0255097   .0952743    -0.27   0.792    -.2256736    .1746542
```

```
        lrp3 |  -.6819342   .1286368    -5.30   0.000      -.95219   -.4116784
       _cons |   14.52537   2.114908     6.87   0.000     10.08212    18.96863
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  5,    23) =  1.071649

. reg lq1 lre lrp1 lrp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  3,    19) =  118.79
       Model |  .766565902     3  .255521967           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  .040869691    19  .002151036           R-squared     =  0.9494
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9414
       Total |  .807435592    22  .036701618           Root MSE      =  .04638

------------------------------------------------------------------------------
         lq1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         lre |  -5.364744   .4750821   -11.29   0.000    -6.359103   -4.370386
        lrp1 |   .7074307   .1347484     5.25   0.000      .425399    .9894623
        lrp3 |    2.67427    .345262     7.75   0.000     1.951629    3.396912
       _cons |   70.98983    6.47565    10.96   0.000     57.43613    84.54352
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  4,    23) =  1.733124

. reg lq3 lre lrp1 lrp3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      23
-------------+------------------------------           F(  3,    19) =   47.40
       Model |  .029835392     3  .009945131           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  .003986824    19  .000209833           R-squared     =  0.8821
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.8635
       Total |  .033822216    22  .001537373           Root MSE      =  .01449

------------------------------------------------------------------------------
```

```
         lq3 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         lre |  -.1989407   .1483821    -1.34   0.196     -.509508    .1116267
        lrp1 |   .2709758   .0420859     6.44   0.000      .182889    .3590625
        lrp3 |  -.6995357   .1078355    -6.49   0.000     -.925238   -.4738335
       _cons |   14.63644   2.022536     7.24   0.000     10.40322    18.86965
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  4,    23) =  1.127541
```

9.6.3 株価，金利，為替レート

$$\text{Kabu}_i = -\underset{(2.58)}{1883.1} + \underset{(8.27)}{46.3}\ \text{ExRate}_i + \underset{(51.7)}{6802.6}\ R_i$$

$$s = 2309.9,\quad R^2 = 0.570,\quad \overline{R}^2 = 0.570,\quad DW = 0.021$$

$$\text{Kabu}_i = -\underset{(0.03)}{2.36} + \underset{(0.31)}{0.164}\ \text{ExRate}_i + \underset{(1.96)}{36.5}\ R_i + \underset{(482)}{0.995}\ \text{Kabu}_{i-1}$$

$$s = 214.8,\quad R^2 = 0.996,\quad \overline{R}^2 = 0.996,\quad DW = 2.100$$

$$\Delta \text{Kabu}_i = \underset{(0.119)}{8.11} - \underset{(0.173)}{0.091}\ \text{ExRate}_i - \underset{(0.070)}{0.862}\ R_i$$

$$s = 215.1, \quad R^2 = 0.000015, \quad \overline{R}^2 = -0.00097, \quad DW = 2.106$$

● Stata による出力結果

データは，

http://www2.econ.osaka-u.ac.jp/~tanizaki/class/2011/econome/nikkei.csv

からダウンロード可

```
--------------------------------------------------------


. gen time=_n

. tsset time
        time variable:  time, 1 to 2028
                delta:  1 unit

. reg kabu exrate r

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    2028
-------------+------------------------------           F(  2,  2025) = 1341.74
       Model |  1.4318e+10     2  7.1590e+09           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  1.0805e+10  2025  5335630.99           R-squared     =  0.5699
```

```
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.5695
       Total |  2.5123e+10  2027  12394036.8           Root MSE      =  2309.9

------------------------------------------------------------------------------
        kabu |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      exrate |   46.30522   5.601817     8.27   0.000      35.3193    57.29115
           r |    6802.61   131.6017    51.69   0.000     6544.521    7060.699
       _cons |  -1883.071    730.508    -2.58   0.010    -3315.696   -450.4449
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  3,  2028) =   .021141

. reg kabu exrate r l.kabu

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    2027
-------------+------------------------------           F(  3,  2023) =       .
       Model |  2.4997e+10     3  8.3323e+09           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  93298782.6  2023  46119.0225           R-squared     =  0.9963
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9963
       Total |  2.5090e+10  2026  12384078.2           Root MSE      =  214.75

------------------------------------------------------------------------------
        kabu |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      exrate |   .1643596   .5295945     0.31   0.756    -.8742481    1.202967
           r |   36.51834    18.6521     1.96   0.050     -.060989    73.09767
             |
        kabu |
         L1. |   .9945113    .002064   481.84   0.000     .9904636     .998559
             |
       _cons |  -2.359124   68.05383    -0.03   0.972     -135.822    131.1038
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  4,  2027) =  2.100248
```

```
. reg dkabu exrate r if tin(2,2028)

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    2027
-------------+------------------------------           F(  2,  2024) =    0.02
       Model |  1443.23541     2  721.617703           Prob > F      =  0.9845
    Residual |  93624927.9  2024  46257.3754           R-squared     =  0.0000
-------------+------------------------------           Adj R-squared = -0.0010
       Total |  93626371.1  2026   46212.424           Root MSE      =  215.08

------------------------------------------------------------------------------
       dkabu |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      exrate |  -.0906022   .5216244    -0.17   0.862    -1.113579    .9323746
           r |  -.8624553   12.27849    -0.07   0.944    -24.94225    23.21734
       _cons |   8.109931    68.0417     0.12   0.905    -125.3291     141.549
------------------------------------------------------------------------------

. dwstat

Durbin-Watson d-statistic(  3,  2027) =  2.106308
```

第10章　推定量の求め方

10.0.1　最小二乗法

- n 個のデータ (実現値)： $x_1, x_2, \cdots, x_n$
- 背後に対応する確率変数を仮定： $X_1, X_2, \cdots, X_n$
- $\mathrm{E}(X_i) = \mu$,　$\mathrm{V}(X_i) = \sigma^2$ を仮定

母数 (μ, σ^2) を推定する。

観測データ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ をもとにして，μ の最小二乗推定値を求める。

$$\min_{\mu} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

μ の解を $\hat{\mu}$ とすると，

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

となり，$\hat{\mu} \equiv \overline{x}$ を得る。

すなわち，

$$\frac{\mathrm{d}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{\mathrm{d}\mu} = 0$$

を μ について解く。

μ の最小二乗推定量はデータ x_i を対応する確率変数 X_i で置き換えて，

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

となり，$\hat{\mu} \equiv \overline{X}$ を得る ($\hat{\mu}$ について，推定値と推定量は同じ記号を使っている)。

以上を回帰分析に応用すると，

$$\min_{\alpha,\beta}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\alpha-\beta X_i)^2$$

を解くことになる。

すなわち，

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\alpha-\beta X_i)^2}{\partial\alpha}=0$$
$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\alpha-\beta X_i)^2}{\partial\beta}=0$$

の連立方程式を α,β について解く。

10.0.2　最尤法

n 個の確率変数 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ は互いに独立で，同じ確率分布 $f(x)\equiv f(x;\theta)$ とする。ただし，θ は母数で，例えば，$\theta=(\mu,\sigma^2)$ である。

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の結合分布は，互いに独立なので，

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) \equiv \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

と表される。

観測データ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を与えたもとで，$\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$ は θ の関数として表される。すなわち，

$$l(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

となる。

$l(\theta)$ を尤度関数と呼ぶ。

$$\max_{\theta} \; l(\theta)$$

となる θ を最尤推定値 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と呼ぶ。

データ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ で置き換えて，$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を最尤推定量と呼ぶ。

$$\max_{\theta}\ l(\theta)$$

と

$$\max_{\theta}\ \log l(\theta)$$

の θ の解はともに同じものであることに注意。$\log l(\theta)$ を対数尤度関数と呼ぶ。

最尤推定量の性質： n が大きいとき，

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma_\theta^2)$$

ただし，

$$\sigma_\theta^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \mathrm{E}\Big[\Big(\frac{\mathrm{d}\log f(X_i;\theta)}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2\Big]}$$