

課題 No.1

締め切り：2022年6月22日, 23:59:59PM

- 答案には、必ず、氏名と学籍番号を書いて下さい（印刷したときに誰の答案かが分かるように）。
- 答案は tanizaki@econ.osaka-u.ac.jp 宛にメールにファイル添付して送ってください。手書きで解答を作り、写真に撮って画像を送っても構いません。ただし、字が読めるような画質にしてください。
- 厳格にするつもりはありませんが、ファイル・サイズは出来るだけ 2MB（2メガ・バイト）以内にしてください。
（参考）IrfanView (<https://www.irfanview.com/>) のソフトを使うと、小さいサイズの JPEG ファイルに変換することができます。
- Subject に「計量基礎」として下さい。でなければ、ごみ箱に行く可能性があります（Subject でメールを振り分けています）。
- 答えだけの答案を時折見かけますが、答えだけでは正解にはなりません。どのように答えを導いたのかが重要です。

1 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ の n 組のデータがある。このとき、最小二乗法によって X と Y との関係を表す直線 $Y = \alpha + \beta X$ を求めたい。

- (1) 最小二乗法による推定値 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を求めなさい。
- (2) 決定係数が 0 以上 1 以下になることを証明しなさい。

2 下記の表のように、 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ の $n = 5$ 組のデータがある。

i	1	2	3	4	5
Y_i	2	1	2	3	4
X_i	1	2	3	2	3

このとき、最小二乗法によって X と Y との関係を表す直線 $Y = \alpha + \beta X$ を求めたい。

- (3) α, β の最小二乗推定値 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ をそれぞれ求めなさい。
- (4) 決定係数 R^2 を求めなさい。
- (5) 自由度修正済み決定係数 \bar{R}^2 を求めなさい。

3 次の回帰モデルを考える。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ただし, u_1, u_2, \dots, u_n は互いに独立で, $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ を仮定する。

α, β の最小二乗推定量を $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ とする。

β の別の推定量 $\tilde{\beta} = \sum_{i=1}^n (\omega_i + d_i) Y_i$ を考える。ただし, $\omega_i = \frac{X_i - \bar{X}}{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ とする。

σ^2 の推定量 $s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2$ を考える。

このとき, 下記の問いに答えなさい。

- (6) $E(\hat{\beta})$ を求めなさい。
- (7) $V(\hat{\beta})$ を求めなさい。
- (8) $\tilde{\beta}$ が線形不偏推定量であるための条件を求めなさい。
- (9) $\tilde{\beta}$ が線形不偏推定量であるとき, $V(\tilde{\beta})$ を求めなさい。
- (10) $\hat{\beta}$ と $\tilde{\beta}$ のうち, どちらが良い推定量と言えるか説明しなさい。
- (11) $E(s^2), V(s^2)$ を求めなさい。
- (12) s^2 は σ^2 の一致推定量であることを証明しなさい。

(* 問 (11), (12) については, 必要があれば, 「 $U \sim \chi^2(m)$ のとき, $E(U) = m, V(U) = 2m$ 」を使ってよい。