2023/11/14

# 課題 No.1

## 締め切り： 2023 年 11 月 30 日, PM23:59:59

- 答案には，必ず，**氏名**と**学籍番号**を書いて下さい（印刷したときに誰の答案かが分かるように)。
- 答案は TA の大学院生・畠山君（u868710a@ecs.osaka-u.ac.jp）宛にメールにファイル添付して送ってください。手書きで解答を作り，写真に撮って画像を送っても構いません。ただし，字が読めるような画質にして下さい。
- 厳格にするつもりはありませんが，ファイル・サイズは出来るだけ 1MB（1 メガ・バイト）以内にして下さい。

（参考）IrfanView (https://www.irfanview.com/) のソフトを使うと，小さいサイズの JPEG ファイルにすることができます。

- Subject に「**計量経済**」の単語を含めて下さい。でなければ，ごみ箱に行く可能性があります（Subject でメールを振り分けています)。

$\boxed{1}$ $(X_1, Y_1)$，$(X_2, Y_2)$，$\cdots$，$(X_n, Y_n)$ の $n$ 組のデータがある。このとき，最小二乗法によって $X$ と $Y$ との関係を表す直線 $Y = \alpha + \beta X$ を求めたい。

(1) 最小二乗法による推定値 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ を求めなさい。

(2) 決定係数が 0 以上 1 以下になることを証明しなさい。

$\boxed{2}$ 下記の表のように，$(X_1, Y_1)$，$(X_2, Y_2)$，$\cdots$，$(X_n, Y_n)$ の $n = 5$ 組のデータがある。

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y_i$ | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $X_i$ | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |

このとき，最小二乗法によって $X$ と $Y$ との関係を表す直線 $Y = \alpha + \beta X$ を求めたい。

(3) $\alpha$, $\beta$ の最小二乗推定値 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ をそれぞれ求めなさい。

(4) 決定係数 $R^2$ を求めなさい。

(5) 自由度修正済み決定係数 $\overline{R}^2$ を求めなさい。

(6) 回帰式の標準誤差を求めなさい。

(7) $\hat{\beta}$ の標準誤差を求めなさい。

(8) $\beta$ の 95% 信頼区間を求めなさい。

(9) 帰無仮説 $H_0:\ \beta = 0$ を有意水準 10% で検定しなさい。対立仮説については各自設定してよいが，解答には明記しなさい。

$\boxed{3}$ 次の回帰モデルを考える。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

ただし，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は互いに独立で，$u_i \sim N(0, \sigma^2)$ を仮定する。

$\alpha$，$\beta$ の最小二乗推定量を $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ とする。

$\beta$ の別の推定量 $\widetilde{\beta} = \sum_{i=1}^{n}(\omega_i + d_i)Y_i$ を考える。ただし，$\omega_i = \dfrac{X_i - \overline{X}}{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2}$，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ とする。

$\sigma^2$ の推定量 $s^2 = \dfrac{1}{n-2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2$ を考える。

このとき，下記の問いに答えなさい。

(10) $\mathrm{E}(\hat{\alpha})$，$\mathrm{E}(\hat{\beta})$ を求めなさい。

(11) $\mathrm{V}(\hat{\alpha})$，$\mathrm{V}(\hat{\beta})$ を求めなさい。

(12) $\widetilde{\beta}$ が線形不偏推定量であるための条件を求めなさい。

(13) $\widetilde{\beta}$ が線形不偏推定量であるとき，$\mathrm{V}(\widetilde{\beta})$ を求めなさい。

(14) $\hat{\beta}$ と $\widetilde{\beta}$ のうち，どちらが良い推定量と言えるか説明しなさい。

(15) $\mathrm{E}(s^2)$，$\mathrm{V}(s^2)$ を求めなさい。

(16) $s^2$ は $\sigma^2$ の一致推定量であることを証明しなさい。

(*) 問 (15), (16) については，必要があれば，「$U \sim \chi^2(m)$ のとき，$\mathrm{E}(U) = m$，$\mathrm{V}(U) = 2m$」を使ってもよい。