

課題 No.2

締め切り：2024年1月25日（木）12:00

- **[重要]** 解答の提出は1/25までの授業時間に教室まで持って来てください。
今回は解答をメール添付では送らないでください。メール添付で送ってきた場合は、無効にします。

● もし各問に不明な点があれば、どのようなもとでどのように答えたかを筋道を立てて解答してください。筋が通っていれば間違いにはしません。

1 回帰式：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

について、最小二乗法を用いて α, β の推定量 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を求める。通常の仮定は、

- u_1, u_2, \dots, u_n は互いに独立で、すべての i について $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ とする
- X_i は非確率変数である

である。

- (1) 「 u_1, u_2, \dots, u_n は互いに独立」という仮定が成り立たない場合（すなわち、 $i \neq j$ について $\text{Cov}(u_i, u_j) = \sigma_{ij}$ とする）、 β の最小二乗法の推定量 $\hat{\beta}$ は不偏推定量であることを証明しなさい。
- (2) 「すべての i について $V(u_i) = \sigma^2$ 」という仮定が成り立たない場合（すなわち、 $V(u_i) = \sigma_i^2$ とする）、 $\hat{\beta}$ の分散を求めなさい。
- (3) $V(u_i) = \sigma_i^2$ のとき、 β の最も良い推定量を求めなさい。その理由も併せて答えなさい。
- (4) 「すべての i について u_i が同じ正規分布に従う」という仮定が崩れた場合（すなわち、 $u_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ とする）、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ の分布を導出しなさい。
- (5) さらに、「 X_i は非確率変数である」という仮定を緩めて、「 X_i は確率変数であるが、 X_i と u_i は独立である」という仮定の下では、最小二乗法の推定量 $\hat{\beta}$ は不偏推定量と言えることを証明しなさい。
- (6) 「 X_i は確率変数であり、 X_i と u_i は相関がある」という仮定の下では、最小二乗法の推定量 $\hat{\beta}$ は一致推定量と言えないことを証明しなさい。

(*) 必要なら、変数を各自定義してよい。

2 生鮮魚介の需要関数を推定することにした。変数名リストは下記のとおりである。

- F_i = 生鮮魚介の購入量（単位は g）の対数（常用対数）
- Y_i = 勤め先収入（2015 年価格）の対数（常用対数）
- PF_i = 生鮮魚介 1g 当たりの価格（2015 年価格）の対数（常用対数）
- PM_i = 生鮮肉 1g 当たりの価格（2015 年価格）の対数（常用対数）
- PV_i = 生鮮野菜 1g 当たりの価格（2015 年価格）の対数（常用対数）
- PFM_i = 「生鮮魚介 1g 当たりの価格（2015 年価格）÷ 生鮮肉 1g 当たりの価格（2015 年価格）」の対数（常用対数）
- = $PF_i - PM_i$

推定期間は 2000 年～2019 年（すなわち、 $i = 2000 \sim 2019$ ）で、年次データを用いた。

Excel を使って、①、② の 2 つの需要関数を推定した。推定式とその推定結果を下記に記す。

① $F_i = \alpha + \beta Y_i + \gamma_1 PF_i + \gamma_2 PM_i + \gamma_3 PV_i + u_i$

回帰統計						
重相関 R	0.953405					
重決定 R2	0.908981					
補正 R2	0.884709					
標準誤差	0.038065					
観測数	20					
分散分析表						
	自由度	変動	分散	割られた分散	有意 F	
回帰	4	0.21705	0.054262	37.45016	1.22E-07	
残差	15	0.021734	0.001449			
合計	19	0.238783				
	係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%	上限 95%
切片	-13.2654	5.277338	-2.51366	0.023854	-24.5138	-2.01704
Y	3.0975	0.950373	3.259248	0.005282	1.071829	5.123172
PF	-2.46563	0.476834	-5.17083	0.000114	-3.48198	-1.44928
PM	2.356114	0.559867	4.208344	0.00076	1.162785	3.549443
PV	-0.22684	0.658757	-0.34434	0.735371	-1.63094	1.177271

② $F_i = \alpha + \beta Y_i + \gamma_1 PFM_i + u_i$

回帰統計						
重相関 R	0.952767					
重決定 R2	0.907765					
補正 R2	0.896913					
標準誤差	0.035994					
観測数	20					
分散分析表						
	自由度	変動	分散	割られた分散	有意 F	
回帰	2	0.216759	0.10838	83.65543	1.59E-09	
残差	17	0.022024	0.001296			
合計	19	0.238783				
	係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%	上限 95%
切片	-13.8575	4.439189	-3.12162	0.00621	-23.2234	-4.49161
Y	3.215197	0.77528	4.147142	0.000674	1.579499	4.850895
PFM	-2.54348	0.201082	-12.649	4.48E-10	-2.96773	-2.11923

下記の問いに答えなさい。

• ① 式について：

- (3) β は需要の所得弾力性を表す。まず、需要の所得弾力性とは何かを説明しなさい。次に、推定結果から、生鮮魚介とはどのような財が説明しなさい。
- (4) γ_1 は需要の価格弾力性を表す。まず、需要の価格弾力性とは何かを説明しなさい。次に、推定結果から、生鮮魚介とはどのような財が説明しなさい。
- (5) γ_2, γ_3 は需要の交差価格弾力性を表す。まず、需要の交差価格弾力性とは何かを説明しなさい。次に、推定結果から、生鮮魚介と生鮮肉との関係、生鮮魚介と生鮮野菜との関係を説明しなさい（代替材か補完財か？）。
- (6) すべての説明変数の係数がゼロという仮説、すなわち、 $\beta = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ の仮説を検定しなさい。
- (7) β の 99% 信頼区間を求めなさい。
- (8) $\gamma_2 = 0$ という仮説を有意水準 1% で検定しなさい（両側検定を用いなさい）。

• ① 式と ② 式について：

- (9) PF_i の係数推定値と PM_i の係数推定値は符号は異なるが、絶対値で推定値が似た値になっていることと、 PV_i の係数はゼロを棄却できないので PV_i を落として、② 式を推定し直すことにした。① 式と ② 式を推定することで、何を検定しようとしているのか帰無仮説を書きなさい。
- (10) 残差平方和をもとにして前問の間 (9) を検定しなさい。
- (11) 決定係数を利用して問 (9) を検定しなさい。

- ② 式について :

- (12) ダービン・ワトソン (DW) 比を計算したところ, $DW = 0.781$ となった。② 式の誤差項に系列相関があるかどうかを検定しなさい。もし系列相関があった場合は正の系列相関か負の系列相関かを答えなさい。
- (13) もし系列相関があると判定された場合, 最小二乗法の推定量にどのような影響があるのか説明しなさい。

(*) 検定や信頼区間を求める場合, 推定値のどの数字と分布表 (または, 統計表) のどの数字を比較するのかを明記して下さい。