2024/07/12

練習問題 No.1

- 課題ではありません。

$\boxed{1}$ X_1, X_2, $\cdots$, X_n は互いに独立で $f(x_i;\theta)$ の分布に従うものとする。尤度関数は，

$$L(\theta;x)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

と表される。$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ とする。θ はパラメータである。簡単化のために θ はスカラーとする。

(1) x をその確率変数 X に置き換えて，

$$\mathrm{E}\Big[\frac{\partial \log L(\theta;X)}{\partial\theta}\Big]=0$$

を証明しなさい。ただし，log は自然対数とする。

(2) 対数尤度関数の 2 階微分の期待値のマイナスを $I(\theta)$ と下記のように定義される。

$$I(\theta)\equiv -\mathrm{E}\Big[\frac{\partial^2 \log L(\theta;X)}{\partial\theta^2}\Big]$$

$I(\theta)$ はフィッシャーの情報行列と呼ばれる。このとき，

$$I(\theta)=\mathrm{E}\Big[\Big(\frac{\partial \log L(\theta;X)}{\partial\theta}\Big)^2\Big]=\mathrm{V}\Big(\frac{\partial \log L(\theta;X)}{\partial\theta}\Big)$$

を証明しなさい。

(3) θ の不偏推定量を $\hat{\theta}(X)$ と表す。このとき，

$$\mathrm{V}[\hat{\theta}(X)]\geq I(\theta)^{-1}$$

となることを証明しなさい。

(4) $n \longrightarrow \infty$ のとき，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial \log L(\theta;X)}{\partial\theta} \longrightarrow N(0,\sigma^2)$$

となることを証明しなさい。ただし，

$$\sigma^2=-\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\Big[\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \log L(\theta;X)}{\partial\theta^2}\Big]$$

とする。

(5) θ の最尤推定量を $\tilde{\theta}$ とする。$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \theta) \longrightarrow N\Big(0, \frac{1}{\sigma^2}\Big)$$

となることを証明しなさい。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えなさい。

(6) 変数変換によって，X の密度関数が，

$$f(x) = \exp(-x), \qquad x > 0$$

とする。$Y = \lambda X$ のとき，Y の密度関数を求めなさい。

(7) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立に次の分布をしているものとする。

$$f(x) = \frac{1}{\theta}\exp(-x/\theta), \qquad x > 0$$

このとき，尤度比検定によって，帰無仮説 $H_0:\ \theta = 1$ に対して，対立仮説 $H_1:\ \theta \neq 1$ を検定したい。

まず，帰無仮説が正しいという制約付きの尤度関数と制約なしの尤度関数を求めなさい。次に，尤度比検定の検定統計量を求めなさい。最後に，n が大きいとき，この検定統計量はどのような分布になるか答えなさい（自由度と分布名が重要）。