

練習問題 No.2

- 課題ではありません。

1 時系列 y_1, y_2, \dots, y_T が次の AR(1) モデルで表されるものとする。

$$y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2), \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

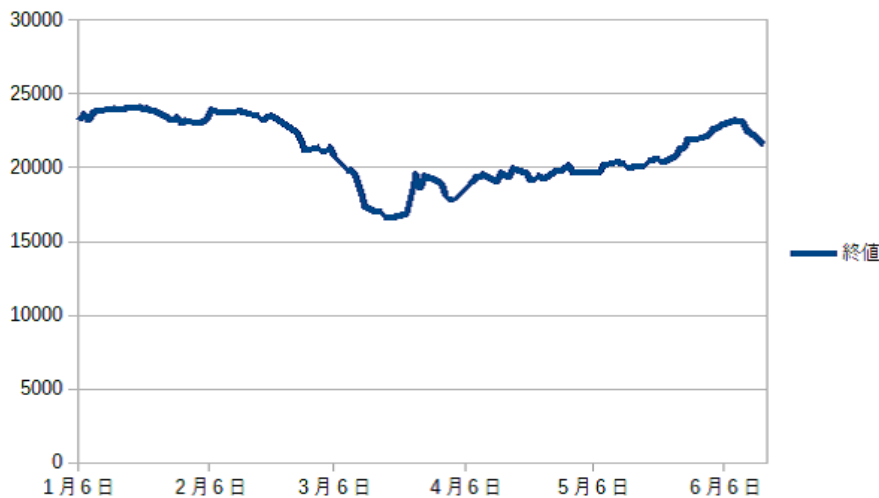
$|\phi| < 1$ かつ $T \rightarrow \infty$ のとき, $\sqrt{T}(\hat{\phi} - \phi) \rightarrow N(0, 1 - \phi^2)$ となる。

しかし, $\phi = 1$ かつ $T \rightarrow \infty$ のとき,

$$T(\hat{\phi} - 1) \rightarrow \frac{\frac{1}{2}(W(1)^2 - 1)}{\int_0^1 W(r)^2 dr}$$

ことを証明しなさい。

2 下記グラフは 2020 年 1 月 6 日 ~ 6 月 15 日の日経平均 225 の終値の日次データ (データ数は 108 個) である。



通常の最小二乗法で下記の式を推定推定することにした。

$$\Delta X_t = \rho X_{t-1} + \epsilon_t \tag{1}$$

$$\Delta X_t = \alpha + \rho X_{t-1} + \epsilon_t \tag{2}$$

X_t は日経平均 225 の終値の日次データの自然対数, (α, ρ) はパラメータ, ϵ_t は誤差項で互いに独立で正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うものとする。また, $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ とする。

推定結果は, (1) 式, (2) 式の順に, 以下の通りとなった。

```
. reg d.x l.x, noconst
```

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	107
Model	.000056558	1	.000056558	F(1, 106)	=	0.12
Residual	.049264066	106	.000464755	Prob > F	=	0.7279
				R-squared	=	0.0011
				Adj R-squared	=	-0.0083
Total	.049320624	107	.00046094	Root MSE	=	.02156

D.x	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
L1. ^x	-.000073	.0002093	-0.35	0.728	-.0004881 .000342

```
. reg d.x l.x
```

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	107
Model	.000757989	1	.000757989	F(1, 105)	=	1.64
Residual	.048510245	105	.000462002	Prob > F	=	0.2031
				R-squared	=	0.0154
				Adj R-squared	=	0.0060
Total	.049268235	106	.000464795	Root MSE	=	.02149

D.x	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
L1. ^x	-.0260229	.0203163	-1.28	0.203	-.0663064 .0142607
_cons	.2583581	.2022601	1.28	0.204	-.1426864 .6594026

コマンドは通常の最小二乗法のコマンド `reg` を用いている。x, d.x, l.x はそれぞれ X_t , ΔX_t , X_{t-1} とする。

X_t に単位根があるかどうかを検定したい。

- (1) 式について：

- 帰無仮説と対立仮説を書きなさい。
- 検定結果を説明しなさい。この場合の t 値は t 分布（データが多い時には正規分布）にはならないことに注意。

- (2) 式について：

- 帰無仮説と対立仮説を書きなさい。
- 検定結果を説明しなさい。この場合の t 値は t 分布（データが多い時には正規分布）にはならないことに注意。

3 回帰式：

$$y_t = x_t \beta + u_t$$

について、 $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1)$ とする。 u_t の仮定を説明しながら、下記の問に答えなさい。

- (1) 見せかけ回帰とは何か？ どのような問題が起こるのか説明しなさい。

(2) 共和分回帰とは何か？ 見せかけ回帰とは何が異なるのか説明しなさい。

4 回帰式：

$$y_t = \alpha + x_t\beta + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

について、 $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1)$ とする。 $u_t \sim I(0)$ とする。

- (1) α, β の最小二乗推定量を $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ とする。 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の漸近分布を説明しなさい（正確な分布を導出する必要はないが、特徴を説明しなさい）。
- (2) 誤差項 u_t の分散 σ^2 の推定量 $s^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2$ は一致性を持つかどうかを説明しなさい。
- (3) 決定係数 R^2 はどういう傾向になるか説明しなさい。

(*) 実証分析には、このあたりが言葉で説明できれば、共和分は十分です。「講義ノート（見せかけ回帰，共和分）」を参考に。