2024/5/29

課題 No.1

締め切り： 2024 年 6 月 26 日, AM10:20 (授業終了後)

- 答案には，必ず，**氏名**と**学籍番号**を書いて下さい。
- 途中の式展開は省略しないように。

$\boxed{1}$ 次の回帰モデルを考える。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

ただし，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は互いに独立で，$u_i \sim N(0, \sigma^2)$ を仮定する。X_i は非確率変数とする。
α，β の最小二乗推定量を $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ とする。
σ^2 の推定量を $s^2 = \dfrac{1}{n-2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2$ とする。
このとき，下記の問いに答えなさい。

(1) 最小二乗推定量 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ を導出しなさい。

(2) 決定係数 R^2 が 0 以上 1 以下になることを証明しなさい。

(3) $\mathrm{E}(\hat{\alpha})$，$\mathrm{E}(\hat{\beta})$ を求めなさい。

(4) $\mathrm{V}(\hat{\alpha})$，$\mathrm{V}(\hat{\beta})$ を求めなさい。

(5) β の別の推定量 $\widetilde{\beta} = \sum_{i=1}^{n}(\omega_i + d_i)Y_i$ を考える。ただし，$\omega_i = \dfrac{X_i - \overline{X}}{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2}$，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ とする。このとき，$\widetilde{\beta}$ が線形不偏推定量であるための条件を求めなさい。

(6) 問 (5) の $\widetilde{\beta}$ が線形不偏推定量であるとき，$\mathrm{V}(\widetilde{\beta})$ を求めなさい。

(7) $\hat{\beta}$ と $\widetilde{\beta}$ のうち，どちらが良い推定量と言えるか説明しなさい。

(8) $\mathrm{E}(s^2)$，$\mathrm{V}(s^2)$ を求めなさい。

(9) s^2 は σ^2 の一致推定量であることを証明しなさい。

(*) 問 (8), (9) については，必要があれば,「$U \sim \chi^2(m)$ のとき，$\mathrm{E}(U) = m$，$\mathrm{V}(U) = 2m$」を使ってもよい。

$\boxed{2}$ 次の回帰モデルを考える。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

ただし，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は互いに独立で，平均 $\mathrm{E}(u_i) = 0$，分散 $\mathrm{V}(u_i) = \sigma^2$ を仮定する。X_i は非確率変数とする。α，β の最小二乗推定量を $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ とする。

$M_{xx} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 < \infty$ とする。

このとき，下記の問いに答えなさい。

(10) $n \longrightarrow \infty$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})u_i$ の分布を求めなさい。

(11) $n \longrightarrow \infty$ のとき，$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ の分布を導出しなさい。

$\boxed{3}$ $\mu_{y,i}$ と $\mu_{x,i}$ の関係は,

$$\mu_{y,i} = \alpha + \beta\mu_{x,i} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

で必ず成り立つものとする。

しかし，$(\mu_{y,i},\ \mu_{x,i})$ は観測されず未知で，代わりに，$(Y_i,\ X_i)$ が観測されるものとする。$(\mu_{y,i},\ \mu_{x,i})$ と $(Y_i,\ X_i)$ との関係は,

$$Y_i = \mu_{y,i} + u_i \qquad X_i = \mu_{x,i} + v_i$$

とする。ただし，u_i，v_i は誤差項で，$\mathrm{E}(u_i) = 0$，$\mathrm{E}(v_i) = 0$，$\mathrm{V}(u_i) = \sigma_u^2$，$\mathrm{V}(v_i) = \sigma_v^2$ とする。すなわち，$\mathrm{E}(Y_i) = \mu_{y,i}$，$\mathrm{E}(X_i) = \mu_{x,i}$ が成り立つ。

観測される $(Y_i,\ X_i)$ を用いて，最小二乗法で下記の式を推定することにした。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

α，β の最小二乗推定量を $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ とする。

このとき，下記の問いに答えなさい。

(12) ϵ_i を u_i，v_i で表しなさい。

(13) $n \longrightarrow \infty$ のとき，$\hat{\beta}$ は一致性があるかどうかを示しなさい。必要であれば，記号は定義してよい。