

「特殊講義（数理統計）」

(2024年度 秋冬学期 講義ノート)

2024年10月3日(木) 版

谷崎 久志
大阪大学大学院経済学研究科

目次

1	事象と確率	1
1.1	事象	1
1.2	確率	5
2	確率変数と分布	6
2.1	1次元の確率変数と分布	6
2.2	多次元の確率変数と分布	15
2.3	2.4節のための数学の公式	21
2.3.1	置換積分	21
2.3.2	部分積分	22
2.3.3	テーラー展開: 関数 $f(x)$ の近似	24
2.4	分布関数の持つ性質の証明 (いくつかの分布を例にとって)	25

3	平均値，分散	34
3.1	平均・分散の定義と公式	34
3.2	いくつかの分布の平均・分散	55
4	変数変換と和の分布 (連続型確率変数の場合のみ)	78
4.1	一変数の場合	78
4.2	二変数の場合	86
5	積率と積率母関数	103
5.1	積率母関数 (1 変数)	103
5.2	積率母関数 (多変数)	131
	練習問題と解答 (1 章～ 5 章)	138
6	大数の法則と中心極限定理	188

6.1	Chebyshev の不等式	188
6.2	大数の (弱) 法則 (Convergence in probability)	192
6.3	中心極限定理	195
7	大数の強法則 (Almost sure convergence)	200
8	統計的推定	201
8.1	推定法と標本平均および標本分散の性質	201
8.1.1	推定法	201
8.1.2	標本, 統計量, 推定量	203
8.1.3	母平均, 母分散の推定	205
8.2	点推定法: 最適性	214
8.3	推定量の求め方: 最尤法, 積率法, 最小二乗法	236
8.3.1	最尤法	236

8.3.2	積率法 (モーメント法)	253
8.3.3	最小二乗法	257
9	標本分布	258
9.1	正規母集団の場合 (標本平均, 標本不偏分散の標本分布)	258
9.1.1	正規分布: 標本平均 $\bar{X}$ の標本分布	259
9.1.2	χ^2 (カイ自乗) 分布: 標本不偏分散 S^2 の標本分布	262
9.1.3	t 分布: 標本平均 $\bar{X}$ の標本分布	264
9.1.4	F 分布	268
9.2	その他の母集団の場合: 標本平均 $\bar{X}$ の標本分布	269
9.3	その他の母集団の場合: 母数の推定量 $\hat{\theta}_n$ の標本分布 (一般化)	276
10	統計的検定: 大標本検定	278

10.1 ワルド (Wald) 検定	278
10.2 尤度比検定	287
練習問題と解答 (6 章～ 10 章)	300

- この講義ノートは，授業終了後，

<http://www2.econ.osaka-u.ac.jp/~tanizaki/class/2024>
からダウンロード可。

参考文献

- 『確率統計演習 1 確率』 (国沢清典編, 1966, 培風館)
- 『確率統計演習 2 統計』 (国沢清典編, 1966, 培風館)
- Robert V. Hogg, Joseph McKean, Allen T Craig, 2019, *Introduction to Mathematical Statistics* (8th ed.), Prentice Hall.

1 事象と確率

1.1 事象

試行, 標本点, 標本空間

試行: 考察の対象となる実験 (または, 観測) を行うこと

標本点 ω : 試行によって得られる個々の結果

標本空間 Ω : 標本点全体の集合

例: サイコロ投げ:

サイコロ投げ 1 回の試行

標本点： 1, 2, 3, 4, 5, 6 の六つ

標本空間： $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

事象とその演算

事象 A ： 標本空間 Ω の部分集合

ω ： 事象 A を構成する標本点の一つ

$\omega \in A$

例： サイコロ投げ：

サイコロ投げ 1 回の試行

$E = \{2, 4, 6\}$ ： 偶数の目が出る事象

$F = \{1, 2, 3\}$ ： 3 以下の目が出る事象

和事象： $E \cup F$ ： 事象 E と F のどちらか一方に属する標本点 ω の全体から成る集合

積事象： $E \cap F$ ：事象 E と F のどちらにも属する標本点全体の集合

余事象： E^c ：事象 E に属さない標本点の集合

空事象： ϕ ：標本点を全然含まない事象

全事象： Ω ：全部を含む事象

排反： $E \cap F = \phi$ のとき、事象 E と F は互いに排反である

例：コイン投げ3回

表を H, 裏を T とする。

標本点は次の 8 つ：

$$\omega_1 = \{H, H, H\},$$

$$\omega_2 = \{H, H, T\},$$

$$\omega_3 = \{H, T, H\},$$

$$\omega_4 = \{H, T, T\},$$

$$\omega_5 = \{T, H, H\},$$

$$\omega_6 = \{T, H, T\},$$

$$\omega_7 = \{T, T, H\},$$

$$\omega_8 = \{T, T, T\}$$

標本空間： $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$

2 回目が表であるという事象 E ：

$$E = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\}$$

2 回表が出るという事象 F ：

$$F = \{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}$$

$$E \cup F = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$$

$$E \cap F = \{\omega_2, \omega_5\}$$

$$E^c = \{\omega_3, \omega_4, \omega_7, \omega_8\}$$

$$F^c = \{\omega_1, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$$

$$(E \cup F)^c = \{\omega_4, \omega_7, \omega_8\}$$

$$E^c \cap F^c = \{\omega_4, \omega_7, \omega_8\}$$

$$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c \implies \text{ド・モルガンの法則}$$

$$(E \cap F)^c = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$$

$$E^c \cup F^c = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$$

$$(E \cap F)^c = E^c \cup F^c \implies \text{ド・モルガンの法則}$$

1.2 確率

事象 A の確率： $P(A)$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\Omega) = 1, P(\phi) = 0$$

事象 A と B は互いに排反であるとき， $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

条件付き確率： 事象 B の条件のもとで事象 A の確率

$\implies$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \implies$ 乗法定理

事象 A と B は独立: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

公式:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies \text{加法定理}$$

$$A \subset B \text{ のとき, } P(A) \leq P(B)$$

2 確率変数と分布

2.1 1次元の確率変数と分布

確率変数 X : 標本空間 Ω の上で定義された実数値関数 $X = X(\omega)$ を考える。

$X = X(\omega)$: 試行結果 (標本点) ω が定まると X の値が定まる。

$X(\omega)$ がある区間 I の中の値であるような標本点 ω の集合: $\{\omega; X(\omega) \in I\}$

$\{\omega; X(\omega) \in I\}$ を事象 $\{X \in I\}$ と書く。

離散型確率変数と確率分布：

確率変数 X の取りうる値を $a_1, a_2, \dots$ とするとき，

$$P(X = a_i) = f(a_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

$f(a_i)$ ： X の確率分布

性質：

$$f(a_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\sum_i f(a_i) = 1$$

ある集合 A について，

$$P(X \in A) = \sum_{a_i \in A} f(a_i)$$

となる。

連続型確率変数と確率密度関数：

ある区間 I について，

$$P(X \in I) = \int_I f(x) dx$$

$f(x)$ ： X の確率密度関数

性質：

$$f(x) \geq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

また，

$$P(X = x) = \int_x^x f(t) dt = 0,$$

$$P(X \in A) = \int_A f(x) dx$$

分布関数： $P(X \leq x) = F(x)$

$F(x)$ ： X の分布関数

性質：

$x_1 < x_2$ のとき， $F(x_1) \leq F(x_2)$

$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

1. 離散型確率変数：

$$F(x) = \sum_{a_i \leq x} f(a_i),$$

$$F(a_i) - F(a_i - 0) = f(a_i)$$

2. 連続型確率変数：

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt,$$
$$F'(x) = f(x)$$

重要な分布：

1. ベルヌイ分布：

離散型確率変数 X の取りうる値は $0, 1$ のどちらかで、その確率分布は、

$$P(X = k) = p^k(1 - p)^{1-k}, \quad k = 0, 1$$

$$0 < p < 1$$

2. 2 項分布：

離散型確率変数 X の取りうる値が $0, 1, 2, \dots, n$ で、その確率分布は、

$$P(X = k) = b(k; n, p)$$

$$\begin{aligned} &\equiv {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}, \\ &k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$0 < p < 1$$

3. ポアソン分布：

離散型確率変数 X の取りうる値が $0, 1, 2, \dots$ で、その確率分布は、

$$\begin{aligned} P(X = k) &= p(k; \lambda) \\ &\equiv e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

$$\lambda > 0$$

$np = \lambda$ (一定)のもとで、 $n \longrightarrow \infty$ のとき、

$$b(k; n, p) \longrightarrow p(k; \lambda)$$

4. 正規分布：

連続型確率変数 X の確率密度関数は、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$N(0, 1) \implies$ 標準正規分布

5. 一様分布：

連続型確率変数 X の確率密度関数は、

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

6. 指数分布：

連続型確率変数 X の確率密度関数は,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 0 < x \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

$$\lambda > 0$$

$\lambda = \frac{1}{2}$ のとき, 自由度 2 のカイ自乗分布に等しい。

7. χ^2 (カイ 2 乗) 分布 (自由度 n):

連続型確率変数 X の確率密度関数は,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \text{ のとき} \\ 0, & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-u} du \implies \text{ガンマ関数}$$

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

8. t 分布 (自由度 n) :

連続型確率変数 X の確率密度関数は,

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

9. Cauchy 分布 :

連続型確率変数 X の確率密度関数は,

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

自由度 1 の t 分布に等しい。